

Examen de Mécanique du solide indéformable

Exercice : Centre et moment d'inertie d'une plaque évidée

1 Calculer la position du centre d'inertie G de la plaque de côtés a et h (cf. figure 1 ci-contre), évidée sur le côté h (au centre de celui-ci) d'un demi cercle de rayon R .

2 Calculer pour ce solide les moments d'inertie autour de l'axe Ox , puis autour de Oy . On supposera négligeable l'épaisseur de la plaque devant ses autres dimensions.

Note: Pour cet exercice, on aura intérêt à utiliser le principe de superposition, avec une masse surfacique $+\sigma$ pour la plaque, superposée avec une masse surfacique $-\sigma$ pour le trou.

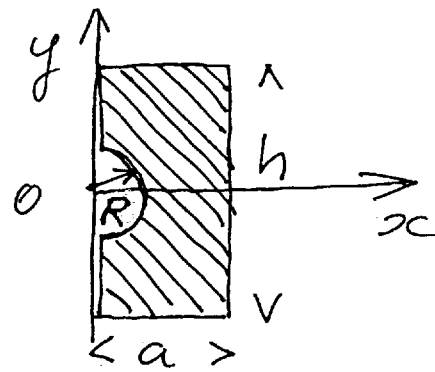


Figure 1

Problème : Système oscillant avec translation

On considère un pendule de masse m_2 ponctuelle montée sur une tige indéformable de longueur ℓ et de masse négligeable (cas du pendule simple). Ce pendule est fixé, par l'intermédiaire d'une liaison rotoïde parfaite, sur un solide de masse m_1 libre de se déplacer sans aucun frottement sur le plan horizontal Ox (cf. figure 2 ci-après). On suppose de plus que le pendule peut effectuer un mouvement de rotation dans le plan de la figure autour du centre d'inertie G de la masse m_1 . Les différentes coordonnées angulaire θ et en translation (x_1, x_2) repérant les mouvements des divers solides sont indiquées sur la figure 2.

1 Évaluer l'énergie cinétique totale du système E_C , ainsi que son énergie potentielle E_P . Écrire les équations de Lagrange **linéarisées** pour les deux coordonnées généralisées θ et x_1 . L'équation de Lagrange pour la variable x_1 permet d'exprimer une relation simple entre l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ et celle de translation \ddot{x}_1 . Éliminer le terme en \ddot{x}_1 dans l'équation de Lagrange en θ , et aboutir à l'équation différentielle $m_1 \ell \ddot{\theta} + (m_1 + m_2) g \theta = 0$, où g représente l'attraction de la pesanteur ($g = 9,81 \text{ m/s}^2$). En déduire la pulsation de résonance ω_1 du système dans le cas des petites oscillations.

2] En intégrant deux fois par rapport au temps l'équation de Lagrange en x_I (ce qui fera apparaître deux constantes d'intégration notées $(C_1$ et $C_2)$ et en notant $\theta(t) = A \sin(\omega_I t + \delta)$, déterminer les quatre constantes $(C_1, C_2, A$ et $\delta)$, à partir des quatre conditions initiales suivantes : $x_I(t=0) = x_0$; $\dot{x}_I(t=0) = \dot{x}_0$; $\theta(t=0) = \theta_0$; $\dot{\theta}(t=0) = \dot{\theta}_0$. Écrire l'expression finale de $\theta(t)$ et de $x_I(t)$.

3] Les équations linéarisées du mouvement de la question 1] s'écrivent sous la forme :

$$(m_1+m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ell\ddot{\theta} = 0, \quad (1)$$

$$m_2\ell\ddot{x}_1 + m_2\ell^2\ddot{\theta} + m_2g\ell\theta = 0. \quad (2)$$

En déduire l'équation aux pulsations pour les petites oscillations du système. Retrouver ainsi la pulsation ω_I de la question 1]. Que vaut l'autre pulsation ? Que signifie ce résultat en terme de mouvement (mode cinématique ou mode de corps solide) ? Discuter ce résultat en proposant une explication "mécanique".

4] Le résultat obtenu à la question 3] tend à indiquer que le système ne possède en réalité (et contrairement à la modélisation proposée à la question 1]) qu'un seul degré de liberté. Ceci se justifie d'ailleurs par la relation entre \ddot{x}_1 et $\ddot{\theta}$ (cf. équation (1), question 3]). Calculer la composante horizontale P_x (le long de Ox) de la quantité de mouvement et retrouver pour son expression linéarisée l'équation (1). On pourra aussi retrouver ce résultat en exprimant $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0$, avec la fonction de Lagrange L fournie par son expression habituelle $L = E_C - E_P$. Déduire de tous ces résultats que le centre d'inertie du système articulé reste immobile au cours des petites oscillations (pour le mouvement propre s'effectuant à la pulsation ω_I tout du moins).

Caractériser l'état vibratoire (en phase, ou en opposition de phase) pour les deux mouvements propres (à $\omega = \omega_I$ et pour $\omega = 0$). Justifier ces résultats de manière précise.

5] Le pendule simple de masse m_2 et de longueur ℓ est remplacé par un pendule pesant constitué d'une tige cylindrique de même longueur ℓ et de même masse m_2 . On suppose que le rayon de la tige est de dimension parfaitement négligeable par rapport à sa longueur. Le moment d'inertie de la tige (par rapport à G) sera pris égal à $m_2 \ell^2 / 12$. En quoi seront modifiées les équations du mouvement ? Établir la nouvelle équation différentielle en θ de la question 1].

6] On revient au cas du pendule simple de la question 1]. Le système est modifié par l'addition de ressorts latéraux (cf. figure 3 ci-dessous) de masse négligeable et de coefficient de raideur k . Établir les nouvelles équations du mouvement linéarisées (on rappelle que le calcul complet a été effectué en cours avec des notations similaires à celle du présent énoncé).

7] Les équations de la question 6] se mettent sous la forme suivante :

$$\ddot{x}_1 + \alpha\ell\ddot{\theta} + \omega_{01}^2 x_1 = 0, \quad (3)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}_1}{\ell} + \omega_{01}^2 \theta = 0. \quad (4)$$

Mettre ces équations sous forme matricielle et commenter sur le couplage inertiel (ou gyroscopique) du système. Déterminer les modes propres du système. Calculer notamment les pulsations propres. Montrer que dans le cas limite où $m_1 \gg m_2$ on obtient un découplage complet de ces deux modes propres, pour lesquels les pulsations propres sont celles du pendule simple d'une part, et d'un oscillateur harmonique de raideur $2k$ d'autre part. Commenter ce résultat d'un point de vue physique.

Barème envisagé : Environ 5 points pour l'exercice, et 15 points pour le problème.

Nota Bene : Les 7 questions du problème sont totalement indépendantes et peuvent être traitées séparément. Les notes de cours, de TD et tous documents manuscrits sont autorisés.

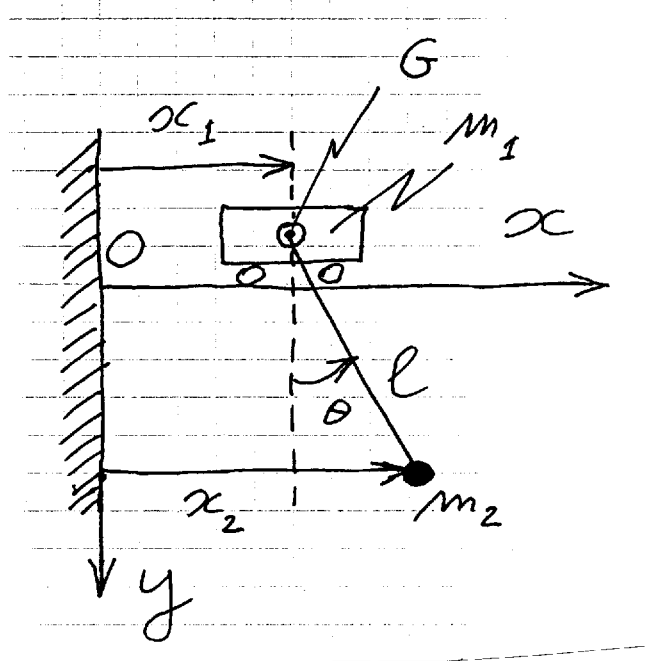
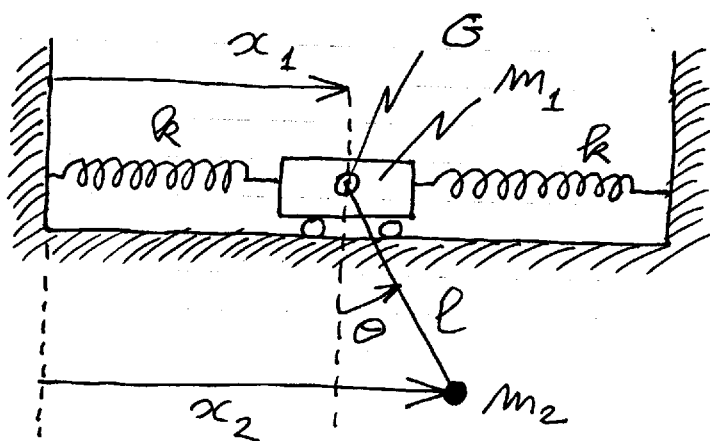


Figure 2

Figure 3



DEUST VAS 2^{ème} année - sept. 2001

Examen de Mécanique - Eléments de correction

Exercice : Centre et moment d'inertie
d'une plaque évidée

⊗ Calcul de l'abscisse x_G du solide.
Soit x_C l'abscisse du $\frac{1}{2}$ disque.

$$x_C = \frac{1}{S} \int x ds = \frac{2}{\pi R^2} \int x ds, \text{ avec } ds = 2R \sin \theta d\theta$$

$$\text{et } x = R \cos \theta \Rightarrow |dx| = R \sin \theta d\theta$$

$$ds = 2R^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \int x ds = 2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$$

$$= 2R^3 \int_0^1 \sin^2 \theta d(\sin \theta) = 2R^3 \left[\frac{4}{3} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow x_C = \frac{2}{\pi R^2} \times \frac{2R^3}{3} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \approx 0,424 R$$

A cause de la symétrie, $y_C = 0$

On utilise ensuite le principe de superposition
en considérant 2 états, à savoir :

- la plaque de côtés $a \times h$, de masse $+ \sigma$
- le $\frac{1}{2}$ disque évidé de rayon R , de masse $- \sigma$

$$x_G = \frac{m_C x_C + m_P x_P}{m_C + m_P}, \text{ avec :}$$

$$x_C = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi}; \quad x_P = \frac{a}{2}; \quad m_P = \sigma ah; \quad m_C = -\sigma \frac{\pi R^2}{2}$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\frac{a^2 h}{2} - \frac{2R^3}{3}}{ah - \frac{\pi R^2}{2}}$$

⊗ Calcul du moment d'inertie du solide

• cas de la plaque (de densité $+ \sigma$) seule

$$\int_S z^2 dm = 0, \text{ car épaisseur négligeable}$$

$$I_{xoxo} = \int_S (y^2 + z^2) dm = \int_S y^2 dm$$

$$I_{yoy} = \int_S (x^2 + z^2) dm = \int_S x^2 dm$$

$$\left. \begin{aligned} dm &= \sigma ds \\ m_p &= h a \sigma \end{aligned} \right\} \Rightarrow dm = \frac{m_p}{ah} dx dy$$

$$\begin{aligned} I_{xox} &= \int_S y^2 dm = \frac{m_p}{ah} \iint y^2 dx dy = \frac{m_p}{ah} a \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy \\ &= \frac{m_p}{h} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{+h/2} = \frac{m_p}{h} \times \frac{h^3}{12} = \frac{m_p h^2}{12} = \frac{h^3 a \sigma}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yoy} &= \int_S x^2 dm = \frac{m_p}{ah} \iint x^2 dx dy = \frac{m_p}{ah} h \int_0^a x^2 dx \\ &= \frac{m_p}{h} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{m_p}{a} \times \frac{a^3}{3} = \frac{m_p a^2}{3} = \frac{h a^3 \sigma}{12} \end{aligned}$$

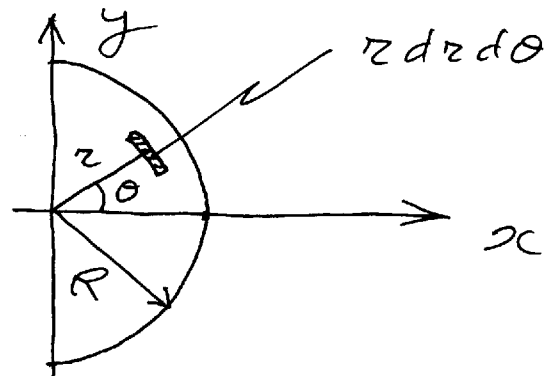
• cas du $\frac{1}{2}$ disque seul

figure plane $\Rightarrow \int_S z^2 dm = 0$

$$\left. \begin{aligned} dm &= \sigma ds \\ m_c &= \frac{\pi R^2}{2} \sigma \end{aligned} \right\} \Rightarrow dm = \frac{2m_c}{\pi R^2} ds$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_S x^2 dm &= \frac{2m_c}{\pi R^2} \int_S x^2 ds \\ &= \frac{2m_c}{\pi R^2} \underbrace{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2 \theta d\theta}_{\pi} \underbrace{\int_0^R r^3 dr}_{\frac{R^4}{4}} = \frac{m_c R^2}{4} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow I_{yoy} = \frac{\pi R^4}{8} \sigma$$

Pour I_{xox} , on retrouve le même résultat (cela se justifie aussi par raison de symétrie)

Soit au total :

$$I_{xox} = \left(\frac{h^3 a}{12} - \frac{\pi R^4}{8} \right) \sigma ; \quad I_{yoy} = \left(\frac{h a^3}{3} - \frac{\pi R^4}{8} \right) \sigma$$

Problème: Système oscillant avec translation

1- Pendule simple, d'où mouvement de translation circulaire de la masse m_2

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$\text{avec } \begin{cases} x_2 = x_1 + l \sin \theta \\ y_2 = l \cos \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + 2l \dot{x}_1 \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2)$$

$$E_p = E_{p0} - m_2 g l \cos \theta$$

$$\Delta x_1: (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l \ddot{\theta} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta \theta: m_2 l \ddot{x}_1 + m_2 l^2 \ddot{\theta} + m_2 g l \theta = 0 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \ddot{x}_1 = - \left(\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \right) \ddot{\theta}$$

$$(2) \Rightarrow m_2 l \left(- \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \right) \ddot{\theta} + m_2 l^2 \ddot{\theta} = - m_2 g l \theta$$

$$\Rightarrow m_1 l \ddot{\theta} + (m_1 + m_2) g \theta = 0$$

$$\text{d'où } \omega_1 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2) g}{m_1 l}}$$

2- L'équation (1) s'intègre directement:

$$x_1(t) + \left(\frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \right) \theta(t) = C_1 t + C_2$$

et en notant $\theta(t) = A \sin(\omega_1 t + \delta)$,

on détermine C_1, C_2, A et δ à l'aide des conditions initiales:

$$C_1 = \dot{x}_0 + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{\theta}_0; \quad A = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega_1^2}}$$

$$C_2 = x_0 + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \theta_0; \quad \tan \delta = \frac{\omega_1 \theta_0}{\dot{\theta}_0}$$

d'où l'écriture détaillée des fonctions $x_1(t)$ et $\theta(t)$...

3- A partir des équations du mouvement (1) et (2), l'équation aux ω pulsations se met sous la forme :

$$\det \begin{vmatrix} (m_1 + m_2)\omega^2 & m_2 l \omega^2 \\ m_2 l \omega^2 & m_2 l^2 \omega^2 - m_2 g l \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)(m_2 l^2 \omega^2 - m_2 g l)\omega^2 - m_2 l^2 \omega^4 = 0$$

$$\text{D'où } \omega_0 = 0 \text{ et } \omega_1 = \left[\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) g/l \right]^{\frac{1}{2}} \text{ CQFD}$$

$\omega_0 = 0 \Rightarrow$ existence d'un mode de corps rigide (déplacement d'ensemble du système le long de Ox).

4- On peut montrer effectivement que la quantité de mouvement totale du système le long de l'axe Ox , P_x est constante :

$$P_x = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + m_2 l \dot{\theta} \cos \theta = \text{cte} \quad (5)$$

En dérivant cette quantité linéarisée par rapport au temps, on retrouve bien sûr l'équation (1) du mouvement.

On peut retrouver l'expression de P_x en écrivant :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0, \text{ avec } L = E_c - E_p$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{\theta} l \cos \theta) + m_2 g l \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0 \Rightarrow (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\theta} \cos \theta = 0$$

On peut toujours considérer le système comme étant au repos dans son ensemble, alors $\text{cte} = 0$, et l'intégration de l'équation (5) fournit :

$$(m_1 + m_2) x_1 + m_2 l \sin \theta = \text{cte}' \quad (6)$$

relation qui traduit l'immobilité du centre d'inertie du système dans la direction horizontale.

Par ailleurs, l'équation (6) indique clairement que les oscillations du pendule et de l'oscillateur s'effectuent en opposition de phase (pour le mode propre $\omega = \omega_1$).

5- Les changements à prendre en compte sont les suivants :

- la tige possède à la fois un mouvement de translation et de rotation
- le centre d'inertie de la tige se retrouve en $l/2$. On note C ce point.

$$E_C = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{m_2 l^2}{12} \dot{\theta}^2$$

$$\vec{v}_C = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GC} = \dot{x}_1 \vec{e}_1 + \frac{l}{2} \dot{\theta} \vec{e}_4$$

$$v_C^2 = \dot{x}_1^2 + \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{4} + 2 \dot{x}_1 \frac{l}{2} \dot{\theta} \underbrace{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_4}_{\cos \theta}$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{x}_1^2 + \frac{l^2 \dot{\theta}^2}{4} + \dot{x}_1 l \dot{\theta} \cos \theta \right) + \frac{m_2 l^2}{24} \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{24} \right) m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_1 l \dot{\theta} \cos \theta$$

$$= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{x}_1^2 + \frac{1}{6} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_1 l \dot{\theta} \cos \theta$$

$$E_p = E_{p0} - m_2 g \frac{l}{2} \cos \theta$$

$$\alpha_{x_1} : (m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + \frac{1}{2} m_2 l \ddot{\theta} = 0$$

$$\alpha_{\theta} : \frac{1}{2} m_2 l \ddot{x}_1 + \frac{1}{3} m_2 l^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m_2 g l \theta = 0,$$

soit avec une procédure de calcul analogue à celle utilisée dans la question 1 pour aboutir à une équation différentielle fonction de θ :

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{6(m_1 + m_2)}{4m_1 + m_2} \right] \left(\frac{g}{l} \right) \theta = 0,$$

$$\text{d'où } \omega_1^2 = \frac{6(m_1 + m_2)}{4m_1 + m_2} \left(\frac{g}{l} \right)$$

Dans le cas où $m_1 = m_2$, on obtient

$$\omega_1^2 = \frac{12}{5} \left(\frac{g}{l} \right) \text{ contre } \omega_1^2 = 2 \frac{g}{l} \text{ à la question } \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1$$

Ce résultat est logique car le centre d'inertie de la tige est placé plus haut (en $l/2$ au lieu de l)

6 - Sans reprendre la totalité des calculs effectués en cours, on peut écrire les nouvelles équations du mouvement après linéarisation sous la forme :

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l \ddot{\theta} + 2kx_1 = 0$$

$$l \ddot{\theta} + \ddot{x}_1 + g\theta = 0$$

Pour $k=0$, on retrouve bien entendu les équations du mouvement (1) et (2) de la question 1. En notant :

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2}; \quad \omega_{01}^2 = \frac{2k}{m_1 + m_2}; \quad \omega_{02}^2 = \frac{g}{l}$$

on obtient finalement :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \alpha l \ddot{\theta} + \omega_{01}^2 x_1 = 0 & (3) \\ \ddot{\theta} + \frac{\ddot{x}_1}{l} + \omega_{02}^2 \theta = 0 & (4) \end{cases}$$

7 - Cherchons des solutions harmoniques à ces équations sous la forme :

$$x_1(t) = X_1 \exp j\Omega t; \quad \theta = (H) \exp j\Omega t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -X_1 \Omega^2 - \alpha l (H) \Omega^2 + \omega_{01}^2 X_1 = 0 \\ - (H) \Omega^2 - \frac{X_1}{l} \Omega^2 + \omega_{02}^2 (H) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \Omega^2 - \omega_{01}^2 & \alpha l \Omega^2 \\ \frac{\Omega^2}{l} & \Omega^2 - \omega_{02}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ (H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\Omega^2 - \omega_{01}^2)(\Omega^2 - \omega_{02}^2) - \alpha \Omega^4 = 0$$

$$\Rightarrow \Omega^4 (1 - \alpha) - \Omega^2 (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 = 0$$

$$\Delta = (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 - 4(1 - \alpha) \omega_{01}^2 \omega_{02}^2$$

$$= (\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\alpha \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 > 0 \quad \text{d'où 2 racines réelles}$$

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2 + 4\alpha \omega_{01}^2 \omega_{02}^2} \right]$$

7 - (suite et fin)

note: les équations du mouvement peuvent être mises sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha l \\ 1/l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_{01}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{02}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est la matrice structurale d'inertie qui n'est pas diagonale. On parle dans ce cas de couplage d'inertie (ou couplage gyroscopique). Ceci est en relation directe avec la configuration géométrique du système considéré (pendule simple monté sur un oscillateur harmonique).

Dans le cas particulier où $m_1 \gg m_2$, on observe $\alpha \rightarrow 0$ et $\omega_{02}^2 \rightarrow 2k/m_1$

$$\text{si } \alpha = 0 \Rightarrow \Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 - \omega_{02}^2)^2} \right]$$

$$\text{d'où } \Omega_1^2 = \omega_{01}^2 = 2k/m_1$$

$$\text{et } \Omega_2^2 = \omega_{02}^2 = g/l$$

On obtient dans ce cas le découplage des deux éléments du système à savoir pendule simple d'une part et oscillateur harmonique d'autre part. Ce résultat est directement visible sur les équations du mouvement qui deviennent dans ce cas:

$$(3) \begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 = 0 \end{cases}, \text{ car } \alpha = 0$$

$$(4) \begin{cases} \ddot{\theta} + \omega_{02}^2 \theta = 0 \end{cases}, \text{ car } x_1 \text{ n'est plus relié à } \theta \text{ dans l'équation (3)}$$

Examen de Mécanique du solide indéformable

Exercice 1 : Centre de gravité d'un solide composé

On considère un solide composé de deux parties, à savoir une plaque triangulaire isocèle de hauteur h , de base $2R$ et d'ouverture α , accolée à un demi-disque de rayon R (cf. Figure 1). Soit σ , la masse surfacique des deux éléments constitutifs du solide composé, que l'on supposera constante.

- 1 Reprendre le calcul du cours établissant la position OG_1 du centre d'inertie du demi-disque.
- 2 Effectuer alors le calcul de la position OG_2 du centre d'inertie de la plaque triangulaire.
- 3 Trouver finalement la position G du centre d'inertie du solide composé. Discuter enfin la stabilité de l'équilibre de ce solide suivant les cas où G se trouve au-dessus ou en dessous de la base du triangle.

Exercice 2 : Mouvement d'une tige accrochée à l'aide de deux ressorts de traction-compression

On considère une tige de masse M et de centre d'inertie G fixée à un support par l'intermédiaire de deux ressorts de traction compression de masse négligeable. Les deux ressorts possèdent des raideurs respectives k_1 et k_2 , et ils sont accrochés sur la tige à une distance ℓ_1 et ℓ_2 respectivement du centre d'inertie G (cf. Figure 2). A l'équilibre, on suppose que la tige est parfaitement horizontale. On se propose d'étudier le mouvement de ce système, par l'intermédiaire de la coordonnée de translation verticale de G , notée y , et de celle de la déflexion angulaire (rotation angulaire autour de G), notée α . En fait une alternative consisterait à décrire les déplacements verticaux des points de fixation des ressorts 1 et 2, notés par y_1 et y_2 (cf. Figure 2). Dans cet exercice, on supposera que le mouvement de la tige reste dans le plan de la feuille, avec y_1 , y_2 , y , et α , suffisamment petits de telle manière que les deux ressorts restent approximativement verticaux.

- 1 Calculer les énergies cinétique T et potentielle V du système de la façon la plus naturelle et la plus simple possible. Évaluer le nombre de degrés de liberté du système. On cherchera ensuite à se ramener à des expressions de T et de V ne faisant intervenir que les coordonnées y et α . Pour cela on cherchera à exprimer y_1 et y_2 à partir de y et α , dans le cadre de l'hypothèse des petits mouvements, c'est à dire pour $\sin \alpha \approx \alpha$.

② Utiliser les équations de Lagrange pour les coordonnées de pompage y et de tangage α , et aboutir aux deux équations du mouvement. A quelle condition ces deux équations sont-elles découplées (condition de Lemaire) ? Établir les pulsations des mouvements propres de pompage et de tangage dans ce cas du découplage.

Problème : Équilibrage dynamique d'un rotor de centrifugeuse

On considère une centrifugeuse modélisée à l'aide d'un rotor et d'un stator, constitué respectivement d'un disque mobile en rotation et d'un cadre rigide fixe (cf. Figure 3). On suppose que l'axe vertical du rotor joignant le stator aux points O et O' par des liaisons pivot parfaites (sans frottement) est de masse négligeable. De plus, cet axe est monté sur le disque (rayon R et masse M) en passant exactement en son centre d'inertie G (cf. Figure 3), ce qui en assure l'équilibrage statique. Par contre l'équilibrage dynamique n'est pas garanti, et une légère parallaxe angulaire α existe qui va créer un moment de balourd au cours de la rotation du disque. C'est ce problème qui sera modélisé ci-dessous.

① Calculer l'opérateur d'inertie du disque I_G évalué en G , lorsque la parallaxe angulaire n'est pas présente (pour $\alpha = 0$). On s'attachera notamment à vérifier que les moments principaux d'inertie D , E et F (termes non diagonaux de l'opérateur d'inertie) sont bien nuls.

② Refaire le même calcul en présence de la parallaxe angulaire α , existant entre l'axe vertical matériel G_z et l'axe principal d'inertie G_z (cf. Figure 3). On s'attachera notamment à montrer que certains termes de l'opérateur d'inertie sont modifiés, d'autres inchangés, et enfin qu'il en existe de nouveaux (termes non diagonaux). Lorsque $\alpha = 0$, on vérifiera que l'on retrouve bien les expressions du ①.

③ Écrire l'équation du moment cinétique avec l'expression de l'opérateur d'inertie de la question précédente ②. On s'attachera notamment à établir l'expression $\vec{\sigma}_0 = E \dot{\theta} \vec{i} + F \dot{\theta} \vec{j} + C \dot{\theta} \vec{k}$, où $\dot{\theta}$ représente la vitesse angulaire de rotation du disque autour de l'axe OO' (c.a.d. z), et où C , E et F représentent des termes de la matrice d'inertie

$I_G(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix}$. Au cours de la dérivation $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt}$, on fera bien attention au fait que les

vecteurs \vec{i} et \vec{j} sont mobiles au cours du mouvement et qu'il faut donc en conséquence les dériver aussi. Déduire l'expression des 3 moments de balourd N_x , N_y , N_z autour des axes x , y et z .

④ On suppose que le mouvement de rotation de la centrifugeuse est uniforme avec $\dot{\theta} = \omega$. Simplifier les trois expressions précédentes, et montrer finalement que seul le moment le long de y persiste et qu'il est proportionnel au carré de ω . Dans quel cas peut-on observer l'équilibrage dynamique, c'est à dire obtenir $N_y = 0$?

Barème envisagé : Environ 4 points pour l'exercice 1, 6 points pour l'exercice 2, et 10 points pour le problème.

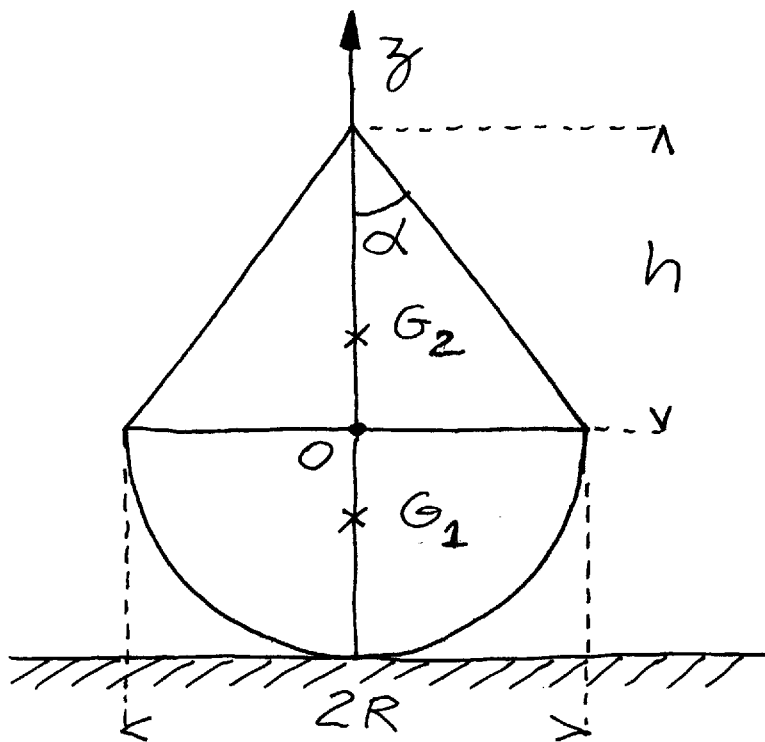


Figure 1

Figure 2

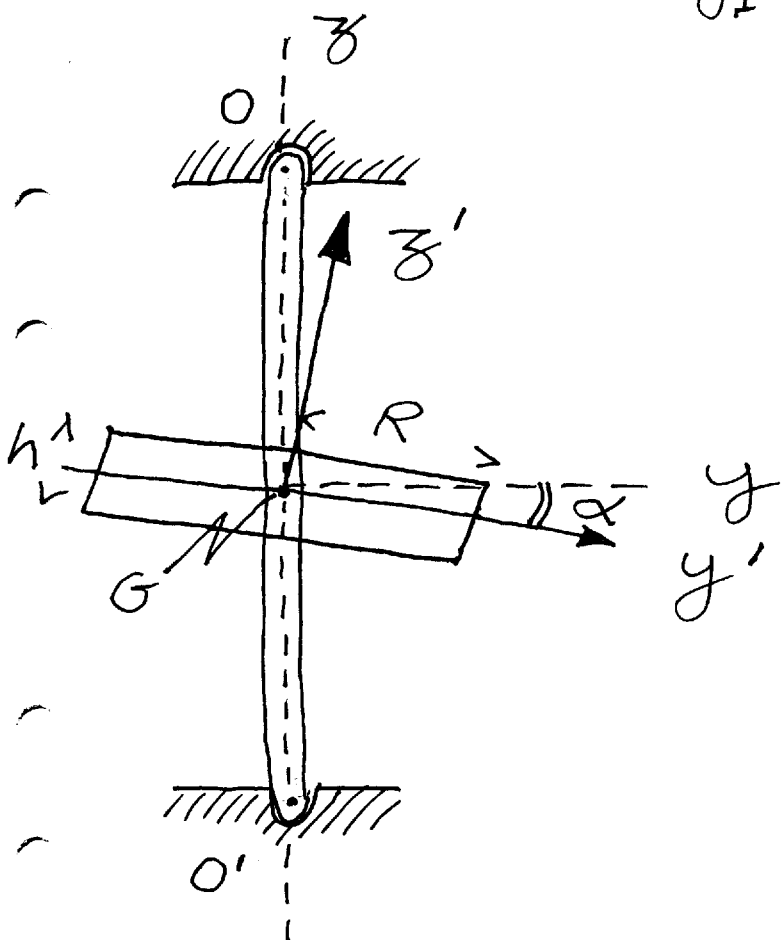
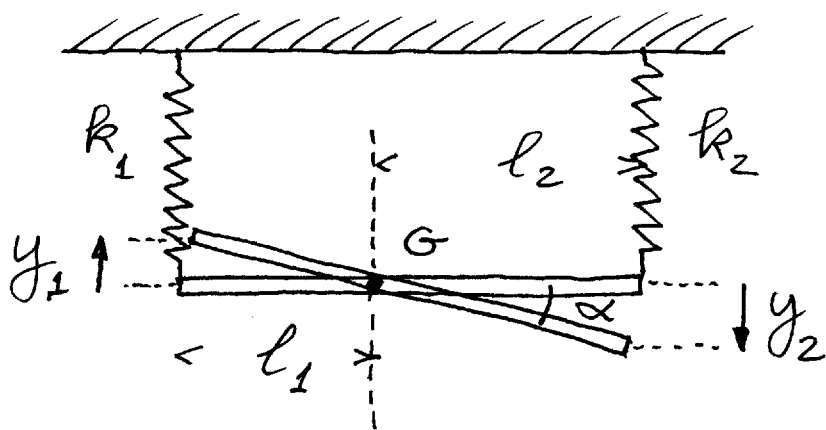


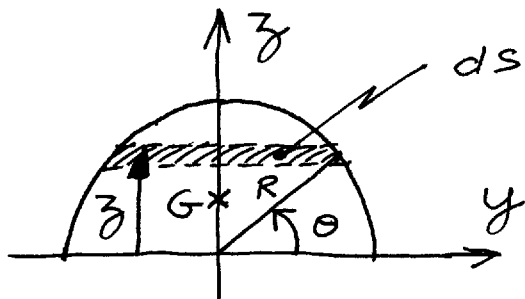
Figure 3

$h \ll R$
(épaisseur négligeable)

EXAMEN de Mécanique du solide
 DEUST VAS 2ème année - Déc. 2000

Exercice 1: Centre de gravité d'un
Solide composé

1- Centre d'inertie d'une surface homogène constituée par un demi-disque (cf. cours)



Par raison de symétrie:

$$y_{G_1} = 0$$

$$z_{G_1} = \frac{1}{S} \int z \, ds = \frac{2}{\pi R^2} \int z \, ds$$

avec $ds = (2R \cos \theta) dz$ et $z = R \sin \theta$

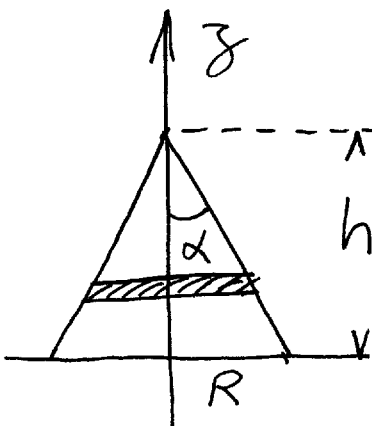
$$\Rightarrow ds = 2R^2 \cos^2 \theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow \int z \, ds = 2R^3 \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta$$

$$= 2R^3 \int_0^1 \cos^2 \theta \, d(\cos \theta) = 2R^3 \int_0^1 u^2 \, du = 2R^3 \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2R^3}{3}$$

$$\Rightarrow z_{G_1} = \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} \Rightarrow \underline{\underline{z_{G_1} = 0,424 R}}$$

2-



Centre d'inertie G_2 de la plaque triangulaire -

$$z_{G_2} = \frac{1}{S} \int z \, ds, \text{ avec}$$

$$ds = 2(h-z) \tan \alpha \, dz$$

$$= 2(h-z) \frac{R}{h} \, dz$$

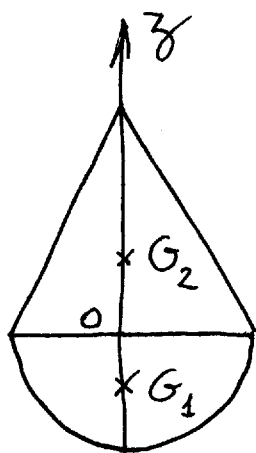
$$z_{G_2} = \frac{1}{hR} \times \frac{2R}{h} \int_0^h z(h-z) \, dz$$

.../...

$$\Rightarrow \mathcal{I}_{G_2} = \frac{2}{h^2} \left[h \int_0^h z dz - \int_0^h z^2 dz \right]$$

$$\mathcal{I}_{G_2} = \frac{2}{h^2} \left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3} \right) \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{I}_{G_2} = \frac{h}{3}}}$$

3 - centre d'inertie du solide composé -



$$\vec{OG} = \frac{m_c \vec{OG}_1 + m_L \vec{OG}_2}{m_c + m_L}$$

$$\Rightarrow \vec{OG} = \frac{-m_c \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} + m_L \times \frac{h}{3}}{m_c + m_L}$$

avec : $\begin{cases} m_c = \sigma \times \pi R^2 \\ m_L = \sigma \times h \times R \end{cases}$

$$\Rightarrow OG = \frac{-\pi R^2 \times \frac{4}{3} \frac{R}{\pi} + h R \frac{h}{3}}{\pi R^2 + h R} = \frac{\frac{h^2}{3} - \frac{4}{3} R^2}{\pi R + h}$$

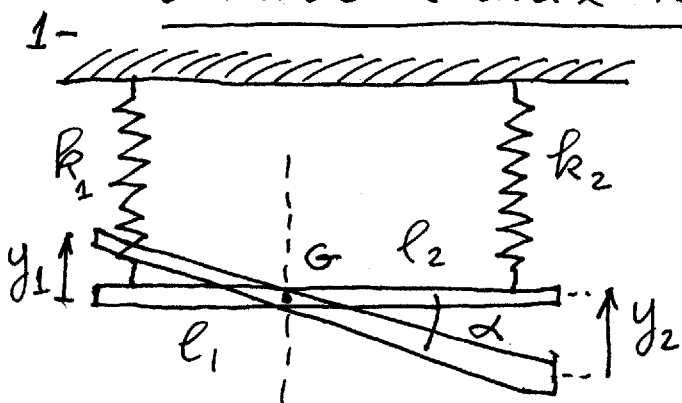
D'où :

$OG > 0$ si $\frac{h^2}{3} > \frac{4}{3} R^2 \Rightarrow h > 2R$
 l'équilibre est dans ce cas instable
 car $\mathcal{I}_G > 0$

$OG < 0$ si $\frac{h^2}{3} < \frac{4}{3} R^2 \Rightarrow h < 2R$
 l'équilibre est dans ce cas stable
 car $\mathcal{I}_G < 0$.

Exercice 2 : Mouvement d'une tige accrochée

à l'aide de deux ressorts de traction - compression



$$\begin{cases} E_p = \frac{1}{2} k_1 y_1^2 + \frac{1}{2} k_2 y_2^2 \\ E_c = \frac{1}{2} J_G \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_G^2 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} m \ddot{y} = -k_1 y_1 - k_2 y_2 \\ I_G \ddot{\alpha} = -k_1 l_1 y_1 + k_2 l_2 y_2 \end{cases}$$

2- or $y_1 = y + l_1 \alpha$; $y_2 = y - l_2 \alpha$

D'où :

$$\begin{cases} m \ddot{y} + (k_1 + k_2) y + (k_1 l_1 - k_2 l_2) \alpha = 0 \\ I_G \ddot{\alpha} + (k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2) \alpha + (k_1 l_1 - k_2 l_2) y = 0 \end{cases}$$

Les deux équations sont découplées lorsque la condition de Lemaire $k_1 l_1 = k_2 l_2$ est vérifiée.

Dès lors, on obtient les pulsations de résonance pour le cas du découplage :

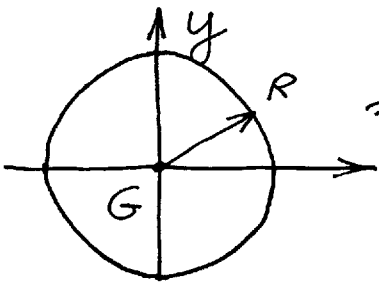
$$\omega_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{m} \quad \text{et} \quad \omega_2^2 = \frac{I_G}{k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2}$$

Problème :

Déséquilibre dynamique d'un rotor de centrifugeuse

1- Calcul au centre d'inertie G du moment d'inertie du disque -

Par raison de symétrie :



$$\int_G x^2 dm = \int_G y^2 dm$$

$$\text{or } \int_G (x^2 + y^2) dm = \int_G z^2 dm$$

$$\begin{cases} dm = \sigma ds = \sigma \times 2\pi r dr \\ M = \sigma S = \sigma \times \pi R^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow dm = \frac{M}{\pi R^2} \times 2\pi r dr = \frac{M}{R^2} \times 2r dr$$

$$\Rightarrow \int_G (x^2 + y^2) dm = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{M}{R^2} \times \frac{2R^4}{4}$$

$$\Rightarrow \int_G (x^2 + y^2) dm = \frac{MR^2}{2} \Rightarrow \int_G x^2 dm = \int_G y^2 dm = \frac{1}{4} MR^2$$

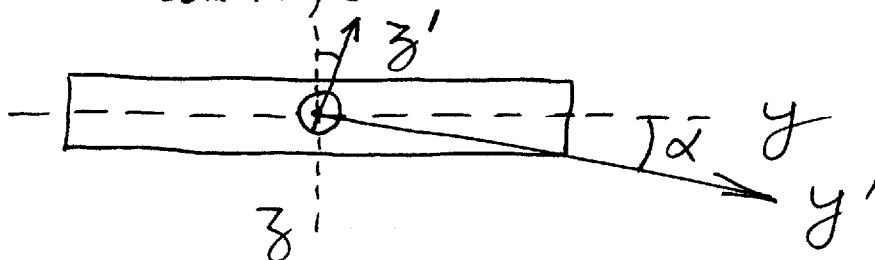
Par ailleurs, $\int_G z^2 dm = 0$, car le disque est supposé d'épaisseur négligeable, d'où :

$$\bar{J}(G, S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{pmatrix} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

Note: Les produits d'inertie sont bien nuls.

Par exemple $\int xy \, dm = \frac{M}{\pi R^2} \int \pi^2 \cos \theta \sin \theta \times r \, dr \, d\theta$
 $= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr = \frac{M}{\pi R^2} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sin 2\theta \, d\theta \right) \times \frac{R^4}{4}$
 $= 0$

2- On refait les calculs dans le cas où une parallaxe angulaire α est présente (cf. figure ci-contre).



rotation d'un angle α

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ z' = z \cos \alpha + y \sin \alpha \end{cases}$$

$$I_{xx} = \int (y^2 + z^2) \, dm = \int y^2 \, dm = \frac{1}{4} MR^2$$

$$I_{yy} = \int (x^2 + z^2) \, dm = \int x^2 \, dm = \frac{1}{4} MR^2$$

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) \, dm = \frac{1}{2} MR^2$$

$$\begin{aligned} I_{z'z'} &= \int (x'^2 + y'^2) \, dm = \int x^2 \, dm + \int y'^2 \, dm \\ &= \frac{1}{4} MR^2 + \int y^2 \cos^2 \alpha \, dm + \int z^2 \sin^2 \alpha \, dm \\ &\quad - 2 \int yz \cos \alpha \sin \alpha \, dm \\ &= \frac{1}{4} MR^2 + \cos^2 \alpha \int y^2 \, dm \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_{z'z'} = \frac{1}{4} MR^2 (1 + \cos^2 \alpha)$$

De même: $I_{x'x'} = \int (y'^2 + z'^2) \, dm$

$$= \int y^2 \cos^2 \alpha \, dm + \int y^2 \sin^2 \alpha \, dm = \int y^2 \, dm$$

$$= \frac{1}{4} MR^2 = I_{xx}, \text{ inchangé, ce qui est normal.}$$

$$I_{y'y'} = \int (x'^2 + z'^2) dm = \int x'^2 dm + \int y'^2 \sin^2 \alpha dm$$

$$= \frac{1}{4} MR^2 (1 + \sin^2 \alpha)$$

$$I_{x'y'} = - \int x'y' dm = - \int xcy \cos \alpha dm + \int xcz \sin \alpha dm$$

$$= 0$$

$$I_{x'z'} = - \int x'z' dm = - \int xcz \cos \alpha dm + \int xcy \sin \alpha dm$$

$$= 0$$

$$I_{y'z'} = - \int y'z' dm = - \int (y \cos \alpha - z \sin \alpha) \cdot$$

$$\quad \times (z \cos \alpha + y \sin \alpha) dm$$

$$= - \int y^2 \cos \alpha \sin \alpha dm = - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \int y^2 dm$$

$$I_{y'z'} = \left(- \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \frac{1}{4} MR^2 = - \frac{1}{8} MR^2 \sin 2\alpha$$

D'où

$$\vec{J}(G, S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} MR^2 (1 + \sin^2 \alpha) & -\frac{1}{8} MR^2 \sin 2\alpha \\ 0 & -\frac{1}{8} MR^2 \sin 2\alpha & \frac{1}{4} MR^2 (1 + \cos^2 \alpha) \end{pmatrix}$$

En conclusion, le mouvement autour de x' sera inchangé, alors que des modifications existeront pour le mouvement autour de y' ou autour de z' . Pour $\alpha = 0$, on retrouve les résultats de la question 2 -

3 - Théorème du moment cinétique

$$\frac{d}{dt} (\vec{\sigma}_G) = \vec{M}_G^t \vec{F} = L \vec{c} + M \vec{j} + N \vec{k}$$

Soit avec $\vec{\sigma}_G = \vec{J}_G \vec{\omega}$ et en notant

$$\vec{J}(G, S) = \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_G = E \dot{\theta} \vec{c} + F \dot{\theta} \vec{j} + C \dot{\theta} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = (E\ddot{\theta} - F\dot{\theta}^2) \vec{c} + (E\dot{\theta}^2 + F\ddot{\theta}) \vec{j}$$

$$+ C\ddot{\theta} \vec{k}$$

soit par identification :

$$\begin{cases} L = E\ddot{\theta} - F\dot{\theta}^2 \\ M = E\dot{\theta}^2 + F\ddot{\theta} \\ N = C\ddot{\theta} \end{cases}$$

Dans notre cas, D et E sont nuls, si bien que
 $L = -F\dot{\theta}^2$; $M = F\ddot{\theta}$ et $N = C\ddot{\theta}$

4 - Dans le cas où $\dot{\theta} = \text{cte} = \omega$, on obtient:

$$L = -F\omega^2; M = 0 \text{ et } N = 0,$$

avec $F = -\frac{1}{8} MR^2 \sin 2\alpha$

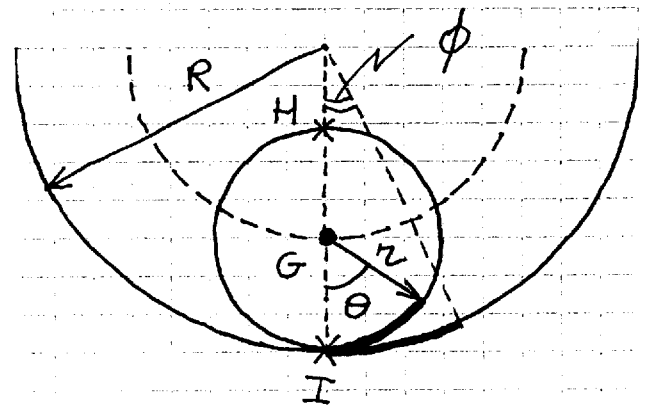
$$\text{D'où } L = \left(\frac{1}{8} MR^2 \sin 2\alpha \right) \omega^2$$

Remarque: On constate que le moment L (perpendiculaire au plan de parallèle angulaire) est proportionnel à la vitesse de rotation au carré. Ce résultat est tout à fait normal et se retrouve pour tous les systèmes en rotation (centrifuges, machines tournantes, etc.). De plus, lorsque $\alpha = 0 \Rightarrow L = 0$, ce qui correspond bien à l'hypothèse d'équilibre dynamique.

Examen de Mécanique du solide indéformable

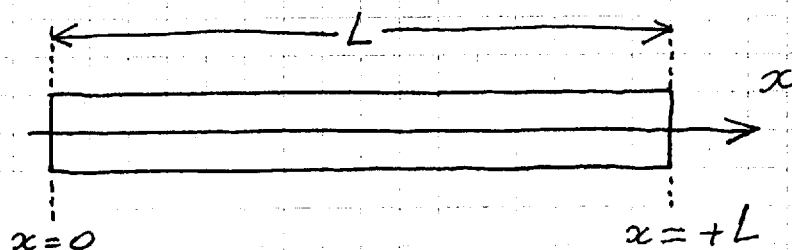
Exercice 1: Roulement d'un cylindre dans une gorge cylindrique

On considère un cylindre de rayon r , pouvant rouler à l'intérieur d'une gorge cylindrique de rayon R (cf. figure ci-contre). Calculer la vitesse du centre d'inertie G en fonction de R , r , et ϕ [on pourra noter que G décrit un cercle de rayon $R-r$]. En déduire la vitesse du point de contact I , ainsi que celle du point H . Écrire alors la **condition de roulement sans glissement** au point I . Exprimer finalement avec cette condition la vitesse en H en fonction de celle en G . Conclusion ?



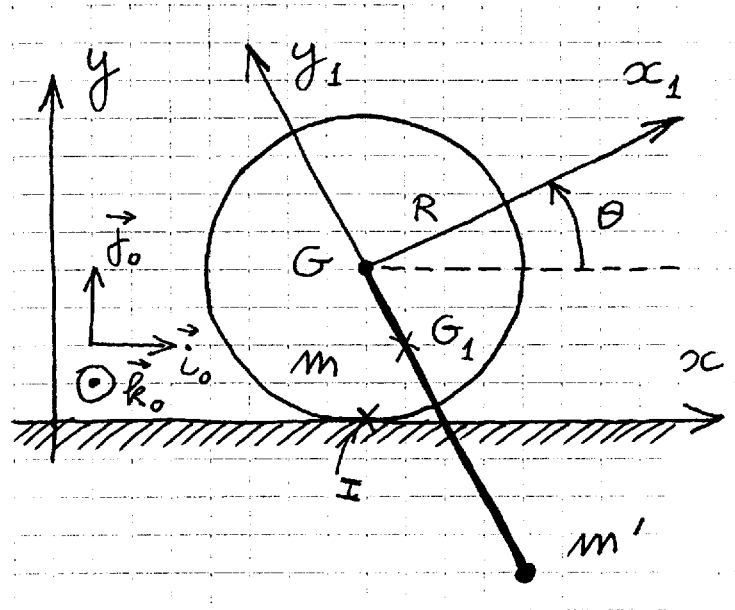
Exercice 2: Centre de gravité d'une barre inhomogène

On considère une barre de longueur L , ayant une masse volumique fonction de la position fournie par l'expression $\rho(x) = \rho_0(x^2/L^2)$, pour $0 < x < L$. Calculer la position du centre d'inertie de la barre. Calculer son moment d'inertie en supposant que la section de la barre est très faible devant L .



Problème: Oscillations d'un système constitué d'une tige montée sur un disque

On considère le solide (1) représenté ci-contre, constitué d'un disque homogène sur lequel est fixé une tige sans masse portant une masse ponctuelle m' à son extrémité. Soit R le rayon du disque, m sa masse et I_0 son moment d'inertie exprimé en G . La tige est de longueur ℓ . La masse totale du solide (1) est $m_1 = m + m'$. Son centre d'inertie est situé en G_1 tel que $a = GG_1$, et son moment d'inertie en G_1 est I_1 .



- 1) Calculer la vitesse absolue du point G , et celle au point I . Écrire alors la condition de roulement sans glissement en I , et en déduire une relation entre x et θ .
- 2) Calculer la vitesse absolue au point G_1 . Calculer ensuite en G_1 la quantité de mouvement et le moment cinétique, ainsi que la quantité d'accélération et le moment dynamique.
- 3) Écrire le théorème de la résultante dynamique et celui du moment cinétique en G_1 . En déduire les 3 équations projetées sur les vecteurs directeurs $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$.
- 4) Linéariser ces 3 équations et déterminer l'équation du mouvement en θ sous la forme :

$$[I_1 + m_1(a - R)^2] \ddot{\theta} + m_1 g a \theta = 0 .$$
- 5) Retrouver cette équation à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
- 6) Même question à l'aide de l'équation de Lagrange en θ . [Note: on prendra soin dans cette question de linéariser après application de l'équation de Lagrange].
- 7) Déterminer a et I_1 à l'aide des données de l'énoncé.

Note: **La plupart des 7 questions sont indépendantes.**

Examen de Mécanique du solide indéformable

Exercice 1 : Centre de gravité d'un demi-disque inhomogène

On considère un demi-disque d'épaisseur négligeable, de rayon R et de masse surfacique σ , constante dans la question [1], et variable dans la question [2].

[1] Soit $\sigma = \sigma_0 = \text{cte}$. On se propose de retrouver le calcul réalisé en cours, à savoir retrouver $z_G = 4R / 3\pi$, mais en utilisant une méthode d'intégration différente de celle du cours (mettant en jeu une application du théorème de Fubini, c.a.d. se ramenant à une intégrale simple - à une dimension). En s'inspirant des notations de la figure 1, et notamment de la surface élémentaire d'intégration en r dr $d\theta$, retrouver le résultat du cours, cette fois-ci en passant par une intégrale double portant sur r et θ .

[2] On suppose dorénavant que la masse surfacique σ possède une symétrie de révolution, s'exprimant sous la forme de $\sigma(r) = \sigma_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$, où r représente avec θ les coordonnées polaires (cf. figure 1 et notations de la question [1]). Refaire le calcul précédent dans ce cas, et montrer que $z_G = R / \pi$. Comment pouvez-vous justifier qualitativement le fait que cette valeur est plus faible que celle obtenue à la question [1] ?

Exercice 2 : Moment d'inertie d'un disque évidé en son centre

On considère un disque homogène de rayon R et de masse surfacique σ évidé en son centre jusqu'en $r = R_0$ (cf. figure 2). On se propose de calculer le terme $I_{zz} = \int_S (x^2 + y^2) dm$ de l'opérateur d'inertie.

[1] Retrouver rapidement le calcul du cours lorsque $R_0 = 0$ (cas du disque non évidé), à savoir $I_{zz} = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2} \pi R^4 \sigma$, où M représente la masse totale du disque.

[2] Refaire ce calcul dans le cas où $R_0 \neq 0$, et montrer que $I_{zz} = \frac{1}{2} M (R^2 + R_0^2)$. Le résultat obtenu pourrait sembler paradoxal, du fait que $R^2 + R_0^2 > R^2$, pourtant il n'en est rien. Sauriez-vous expliquer pourquoi, notamment en revenant aux expressions de I_{zz} pour les deux questions sous la forme avec R et σ (cf. résultat de la question [1] dans l'énoncé).

Problème : Mouvement d'un solide constitué d'un cadre poly-articulé avec tiges rigides

On considère un cadre poly-articulé, constitué de quatre tiges rigides, fixé en un point O d'un bâti (cf. figure 3). Chaque tige de longueur ℓ possède une masse négligeable. Le cadre est articulé aux points A, B et C par des liaisons rotoïdes parfaites. En ces points, il existe des masses notées m , supposées ponctuelles. Entre les points A et B, un ressort de traction-compression, de masse négligeable et de constante de raideur K , est installé. Le système est de plus placé dans le champ de pesanteur \vec{g} orienté vers le bas le long de la verticale. A l'équilibre, l'angle θ qui repère la position angulaire des tiges OA et OB (montage symétrique) prend la valeur $\theta = \theta_e$. On suppose que le point C est astreint à se déplacer au cours du mouvement le long de l'axe Oz uniquement.

- 1 Calculer la vitesse des points A et B, puis celle de C au cours du mouvement. En déduire l'expression de l'énergie cinétique E_c , et montrer qu'elle peut s'écrire: $E_c = m\ell^2\dot{\theta}^2(1 + 2 \sin^2\theta)$.
- 2 Calculer l'énergie potentielle de pesanteur, puis celle relative à la raideur K . Montrer que l'énergie potentielle totale E_p peut se mettre sous la forme : $E_p = 2K\ell^2 \sin^2\theta + 4mg\ell \cos\theta$.
- 3 Appliquer l'équation de Lagrange pour la variable θ , et aboutir à l'équation non linéaire du mouvement.
- 4 On se propose de linéariser cette équation autour de la position angulaire d'équilibre $\theta = \theta_e$. Pour ce faire, on écrit $\theta = \theta_e + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll \theta_e$. Développer alors les lignes trigonométriques $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\sin \theta \cos \theta$ et $\sin 2\theta$ à l'ordre 1 en ε , et aboutir à l'équation du mouvement linéarisée, sous la forme $F \ddot{\varepsilon} + G \varepsilon = H$. Exprimer F , G et H à partir des données du problème (m , g , ℓ , K , θ_e).
- 5 A l'équilibre, on a $\theta = \theta_e$, c'est à dire $\varepsilon = 0$. Conserver dans l'équation du mouvement linéarisée de la question précédente les termes non nuls et aboutir à l'expression de θ_e sous la forme suivante : $\theta_e = \text{Arc cos} \left(\frac{m g}{k \ell} \right)$. Que traduit cette expression en terme d'équilibre entre l'inertie de la masse m et la raideur k du ressort ?
- 6 En repartant de l'équation du mouvement linéarisée de la question 4, évaluer la pulsation de résonance ω_0 du système et montrer que :

$$\omega_0^2 = \frac{2\left(\frac{k}{m}\right) \cos 2\theta_e + 2\left(\frac{g}{\ell}\right) \sin 2\theta_e}{1 + 2 \sin^2 2\theta_e}.$$

Calculer alors la valeur de θ_e , puis celle de ω_0^2 , lorsque $\frac{k}{m} = 2 \frac{g}{\ell} = \Omega^2$.

Barème envisagé : Environ 4 points par exercice et 12 points pour le problème.

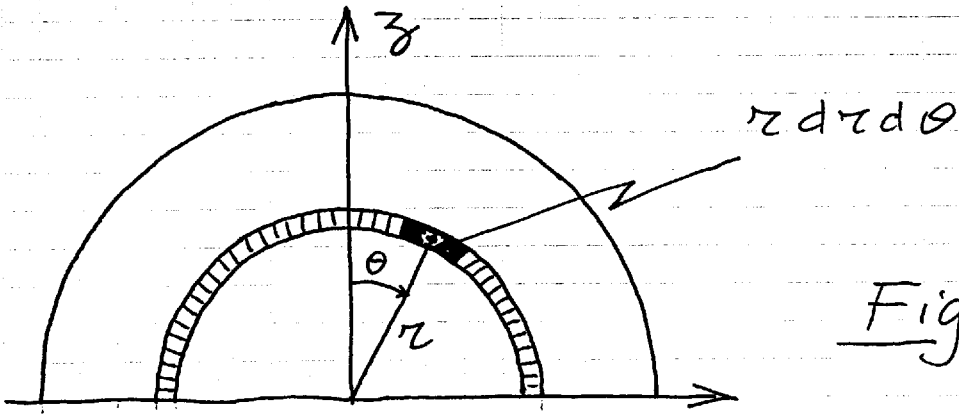


Figure 1

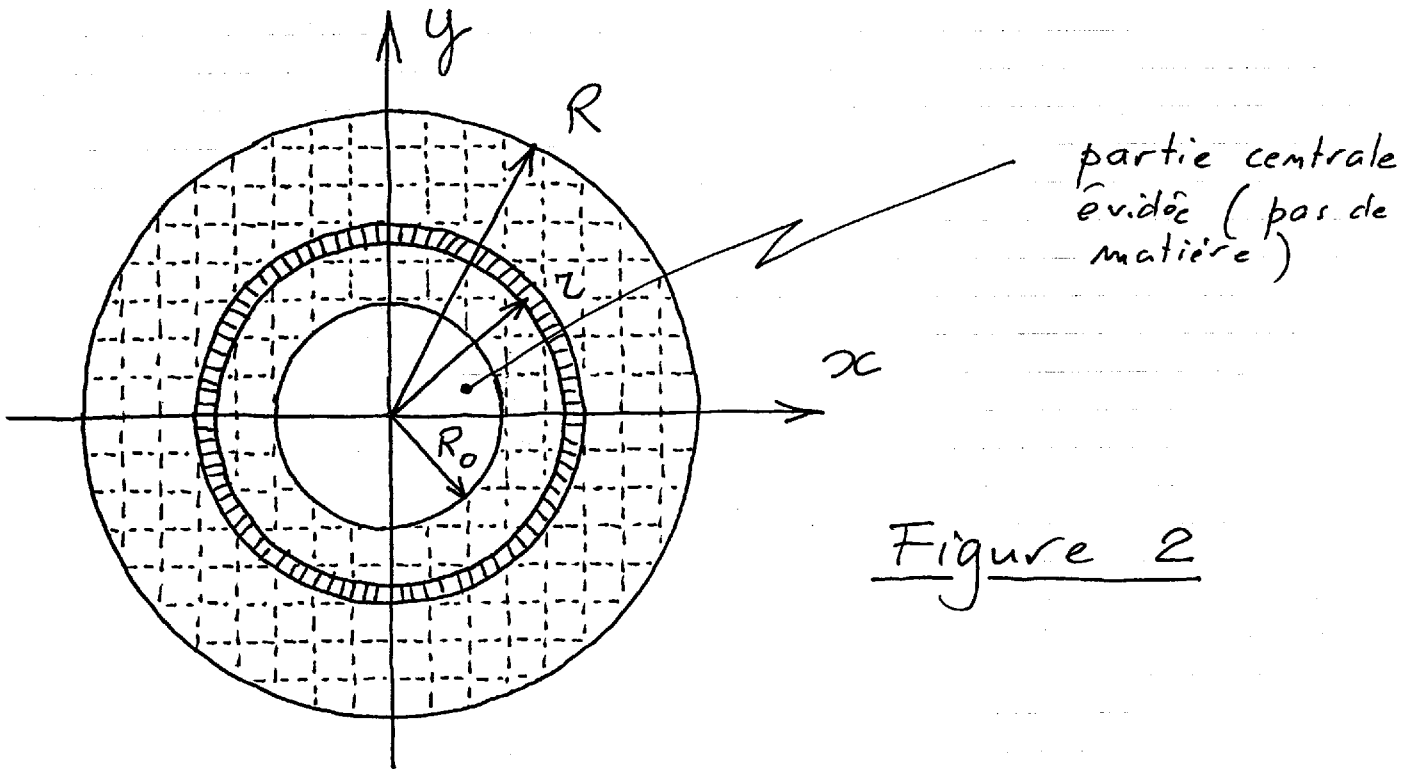


Figure 2

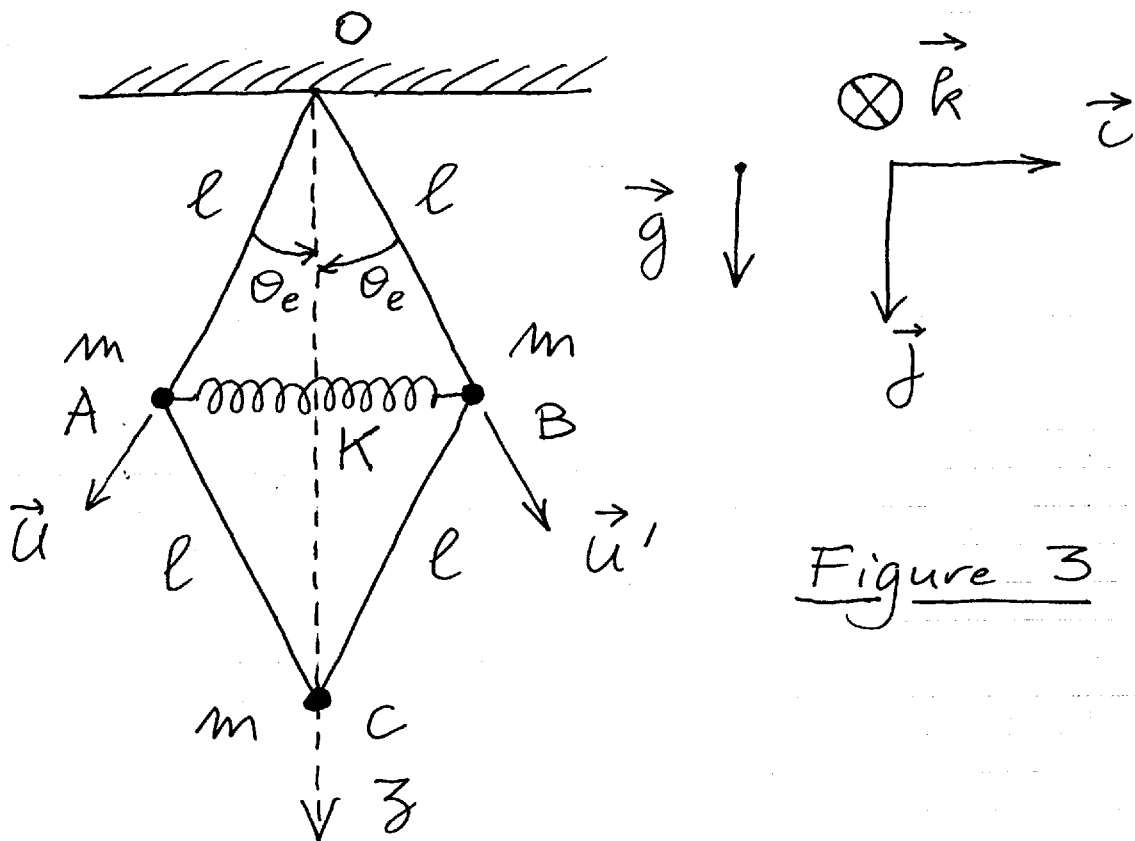
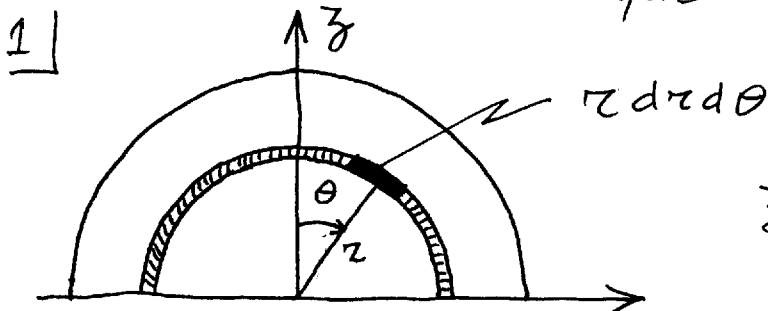


Figure 3

EXAMEN de Mécanique - Deust 2

Janvier 2000

Exercice 1: Centre de gravité d'un $\frac{1}{2}$ disque inhomogène



$$z_G = \frac{\int z dm}{M}$$

avec $z = r \cos \theta$

$$\Rightarrow z_G = \frac{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^R (r \cos \theta) \sigma_0 (r dr d\theta)}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_0^R (\pi r) \sigma_0 dz}$$

$$z_G = \frac{\left(\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta \right) \left(\int_0^R r^2 dz \right)}{\pi \int_0^R dz}$$

$$z_G = \frac{2}{\pi} \frac{R^3}{3} \times \frac{2}{R^2} \Rightarrow \boxed{z_G = \frac{4R}{3\pi}} \quad \text{CQFD}$$

2] cas du solide inhomogène $\sigma(z) = \sigma_0 \left(1 - \frac{z}{R}\right)$

$$z_G = \frac{\left(\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \theta d\theta \right) \left(\int_0^R \left(1 - \frac{z}{R}\right) z^2 dz \right)}{\pi \int_0^R \left(1 - \frac{z}{R}\right) z dz}$$

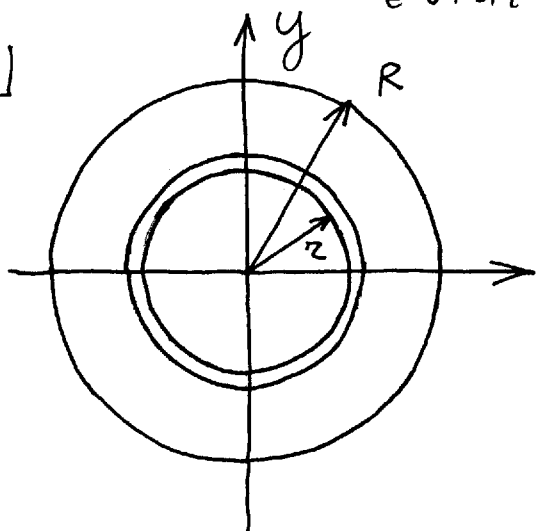
$$z_G = \frac{2}{\pi} \frac{\int_0^R \left(1 - \frac{z}{R}\right) z^2 dz}{\int_0^R \left(1 - \frac{z}{R}\right) z dz} = \frac{2}{\pi} \frac{\int_0^R z^2 dz - \frac{1}{R} \int_0^R z^3 dz}{\int_0^R z dz - \frac{1}{R} \int_0^R z^2 dz}$$

$$z_G = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4R}}{\frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3R}} \right] = \frac{2R}{\pi} \left[\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \right]$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{2R}{\pi} \left[\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} \right] \Rightarrow \boxed{z_G = \frac{R}{\pi}}$$

Exercice 2: Moment d'inertie d'un disque évidé en son centre -

1]



$$\begin{cases} M = \pi R^2 \sigma \\ dm = (2\pi r) dr \sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow dm = M \times \frac{2r dr}{R^2}$$

$$\int x^2 dm = \int y^2 dm \quad (\text{symétrie})$$

$$\int z^2 dm = 0 \quad (\text{pas d'épaisseur})$$

$$\int (x^2 + y^2) dm = \int r^2 dm = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr$$

$$\Rightarrow I_{zz} = \frac{2M}{R^2} \times \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2} \pi R^4 \sigma$$

2] Lorsque le disque est évidé en son centre, on refait le même calcul en intégrant r de R_0 à R :

$$I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int r^2 dm = \frac{2M}{R^2 - R_0^2} \int_{R_0}^R r^3 dr$$

$$\begin{cases} M = \pi (R^2 - R_0^2) \sigma \\ dm = (2\pi r) dr \sigma \end{cases} \Rightarrow dm = \frac{2r dr}{R^2 - R_0^2} \times M$$

$$I_{zz} = \frac{2M}{R^2 - R_0^2} \left[\frac{R^4}{4} - \frac{R_0^4}{4} \right] = \frac{M}{2} \frac{(R^4 - R_0^4)}{(R^2 - R_0^2)}$$

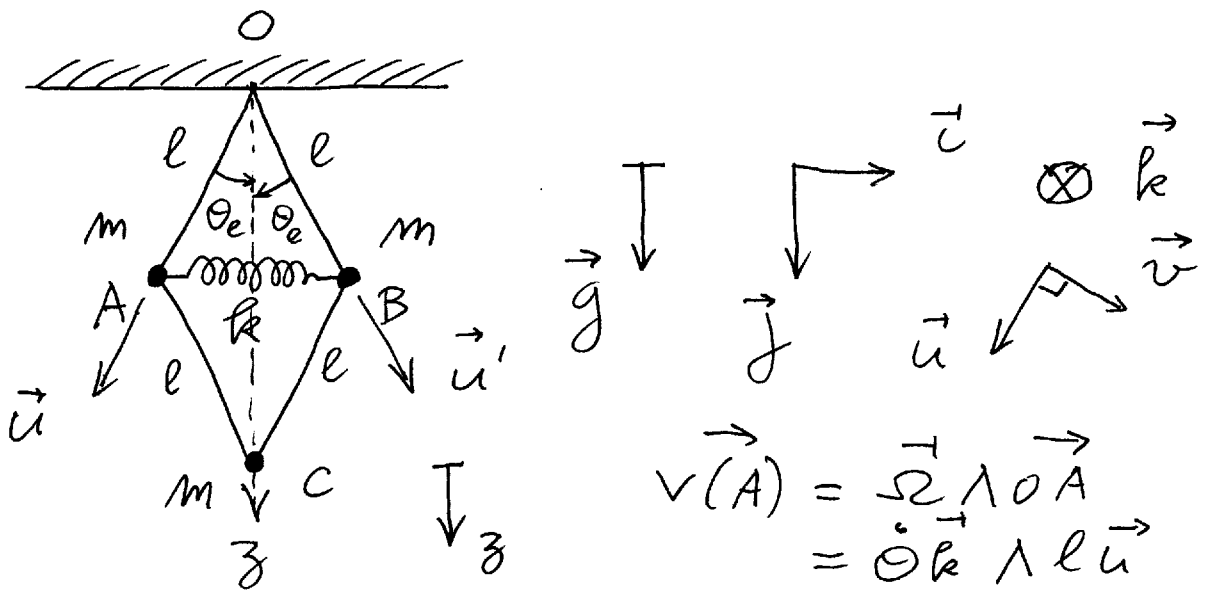
$$\Rightarrow I_{zz} = \frac{M}{2} (R^2 + R_0^2) \quad \text{paradoxe apparent mais explicable}$$

$$\text{En effet: } I_{zz} = \frac{1}{2} \pi (R^2 - R_0^2)(R^2 + R_0^2) \sigma$$

$$\Rightarrow I_{zz} = \frac{1}{2} \pi [R^4 - R_0^4] \sigma < \frac{1}{2} \pi R^4 \sigma$$

En fait, le nouveau moment d'inertie (question 2) est plus faible que celui de la question 1.

Problème: Mouvement d'un solide constitué d'un cadre poly-articulé avec tiges rigides -



①

$$\begin{aligned} \vec{v}(A) &= \vec{\Omega} \wedge \vec{OA} \\ &= \dot{\theta} \vec{k} \wedge l \vec{i} \\ &= l \dot{\theta} \vec{j} \end{aligned}$$

$$\vec{v}(C) = \frac{d\vec{OC}}{dt} = 2l \frac{d \cos \theta}{dt} \vec{j} = -2l \dot{\theta} \sin \theta \vec{j}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(\vec{v}(A)^2 + \vec{v}(B)^2 + \vec{v}(C)^2 \right)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \left(2l \dot{\theta}^2 + 4l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \right)$$

$$\Rightarrow E_c = m l^2 \dot{\theta}^2 (1 + 2 \sin^2 \theta)$$

② $E_p^{\text{raideur}} = \frac{1}{2} k (\Delta L)^2$, avec $\Delta L = 2l \sin \theta$

$$\Rightarrow E_p^{\text{raideur}} = 2kl^2 \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned} E_p^{\text{pesanteur}} &= m \vec{g} \cdot \vec{OA} + m \vec{g} \cdot \vec{OB} + m \vec{g} \cdot \vec{OC} \\ &= mgl \vec{j} \cdot \vec{u} + mgl \vec{j} \cdot \vec{u}' + 2mgl \cos \theta \vec{j} \cdot \vec{j} \\ &= 2mgl \cos \theta + 2mgl \cos \theta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_p^{\text{pesanteur}} = 4mgl \cos \theta$$

Au total:
$$\begin{cases} E_c = m l^2 \dot{\theta}^2 (1 + 2 \sin^2 \theta) \\ E_p = 2kl^2 \sin^2 \theta + 4mgl \cos \theta \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \text{ Au total: } E_c = ml^2 \dot{\theta}^2 (1 + 2 \sin^2 \theta)$$

$$E_p = 2kl^2 \sin^2 \theta + 4mgl \cos \theta$$

Equation de Lagrange en θ :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(2ml^2 \dot{\theta} (1 + 2 \sin^2 \theta) \right) - 4ml^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + 4kl^2 \sin \theta \cos \theta - 4mgl \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow 2ml^2 \ddot{\theta} (1 + 2 \sin^2 \theta) + 4ml^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - 4ml^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta + 4kl^2 \sin \theta \cos \theta - 4mgl \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2ml^2 \ddot{\theta} (1 + 2 \sin^2 \theta) + 4kl^2 \sin \theta \cos \theta - 4mgl \sin \theta = 0}$$

$$\textcircled{4} \sin \theta = \sin(\theta_e + \varepsilon) = \sin \theta_e \cos \varepsilon + \cos \theta_e \sin \varepsilon$$

$$\theta = \theta_e + \varepsilon, \text{ avec } \varepsilon \ll \theta_e$$

$$\Rightarrow \sin \theta \approx \sin \theta_e + \varepsilon \cos \theta_e$$

De même:

$$\cos \theta = \cos(\theta_e + \varepsilon) = \cos \theta_e \cos \varepsilon - \sin \theta_e \sin \varepsilon$$

$$\approx \cos \theta_e - \varepsilon \sin \theta_e$$

$$\sin^2 \theta \approx \sin^2 \theta_e + 2 \varepsilon \sin \theta_e \cos \theta_e \approx \sin^2 \theta_e + \varepsilon \sin 2\theta_e$$

$$\sin \theta \cos \theta \approx \sin \theta_e \cos \theta_e + \varepsilon (\cos^2 \theta_e - \sin^2 \theta_e) \approx \sin \theta_e \cos \theta_e + \varepsilon \cos 2\theta_e$$

$$\Rightarrow 2ml^2 \ddot{\varepsilon} (1 + 2 \sin^2 \theta_e) + 4kl^2 \sin \theta_e \cos \theta_e + 4kl^2 \varepsilon \cos 2\theta_e$$

$$- 4mgl \sin \theta_e - 4mgl \varepsilon \sin 2\theta_e = 0$$

$$\textcircled{5} \quad \text{A l'équilibre} \quad 4kl^2 \sin \theta_e \cos \theta_e = 4mgl \sin \theta_e$$

$$\Rightarrow \theta_e = \text{Arc cos} \left(\frac{mg}{kl} \right)$$

Il reste :

$$2ml^2 \ddot{\epsilon} (1 + 2 \sin^2 \theta_e) + 4kl^2 \epsilon \cos 2\theta_e + 4mgl \epsilon \sin 2\theta_e = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\epsilon} (1 + 2 \sin^2 \theta_e) + \epsilon \left[2 \left(\frac{k}{m} \right) \cos 2\theta_e + 2 \left(\frac{g}{l} \right) \sin 2\theta_e \right] = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{2 \left(\frac{k}{m} \right) \cos 2\theta_e + 2 \left(\frac{g}{l} \right) \sin 2\theta_e}{1 + 2 \sin^2 \theta_e}$$

$$\text{si } \frac{k}{m} = 2 \frac{g}{l} = \Omega^2 \Rightarrow \theta_e = \text{Arcos} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\omega_0^2 = \frac{2\Omega^2 \left(-\frac{1}{2}\right) + \Omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\Omega^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)}{5/2}$$

Examen de Mécanique du solide indéformable

Exercice 1: Barycentre d'un arc et d'un secteur circulaire

On considère un arc circulaire \widehat{AB} , de rayon R , de centre O , et d'angle au sommet $AOB = 2\alpha$ (cf. figure n°1).

① Dans un premier temps, on suppose que cet arc est constitué d'une tige incurvée de masse linéique λ constante. Les dimensions transversales de cette tige sont négligeables devant sa longueur. Déterminer la position du centre d'inertie (ou barycentre) G_1 le long de l'axe de symétrie vertical Oz . Vérifier que G est bien situé entre l'arc \widehat{AB} et la corde associée AB .

② Dans un deuxième temps, on suppose que l'arc circulaire \widehat{AB} délimite un secteur angulaire matériel OAB (zone hachurée de la figure) d'épaisseur constante (et très petite), dont la masse surfacique σ est constante. Calculer la position G_2 du barycentre du secteur angulaire, et vérifier que $G_1 > G_2$.

Exercice 2: Mouvement plan d'une barre en T

On considère un pendule composé, constitué de deux barres homogènes de masse m et de longueur ℓ (cf. figure n°2). La barre OA est mobile sans frottement dans le plan de la figure autour de l'axe Oz orthogonal à celui-ci et dont le point O est immobile. La barre BC est fixée en son milieu perpendiculairement à la première barre, à son extrémité au point A .

① Évaluer l'énergie cinétique des deux barres OA et BC , en utilisant correctement le théorème d'Huygens (pour la barre OA), et le théorème de Koenig (pour la barre BC). En déduire l'énergie cinétique totale.

② Calculer alors l'énergie potentielle de chaque barre (puis l'énergie potentielle totale) dans le champ de pesanteur vertical \vec{g} . A l'aide de la méthode énergétique de votre choix, calculer alors l'équation du mouvement. En déduire la période T pour les petites oscillations ($\sin \theta \approx \theta$), et montrer que $T = 2\pi \sqrt{\frac{17}{18} \frac{\ell}{g}}$. Application numérique pour $\ell = 0,25$ m ; $g = 10$ m s⁻².

Problème: Machine d'Atwood sur plans inclinés

On considère une généralisation de la machine d'Atwood étudiée en cours sous la forme d'une poulie fixe à laquelle sont fixés deux petits chariots de masses respectives M_1 et M_2 (avec $M_2 > M_1$) par l'intermédiaire d'un fil inextensible, de masse négligeable, en contact sans frottement et sans aucun glissement possible dans la gorge de la poulie (cf. figure n°3). On suppose que le moment d'inertie de la poulie pour son mouvement de rotation s'écrit $J = M R^2$, où R représente son rayon. Les chariots sont eux mêmes placés sur des plans inclinés faisant des angles respectifs α_1 et α_2 avec l'horizontale, et ils se déplacent sans aucun frottement dans le plan de la figure uniquement. On se propose de reprendre certains calculs réalisés en cours pour ce type de configuration (machine d'Atwood classique).

[1] Avec la méthode de votre choix (théorèmes généraux ou méthode énergétique), calculer l'accélération γ le long de l'axe vertical. Étudier l'équilibre possible de ce système en fonction de α_1 et α_2 , et montrer que cet équilibre est atteint uniquement si la relation $M_1 \sin \alpha_1 = M_2 \sin \alpha_2$ est vérifiée.

[2] Étudier successivement, en évaluant l'accélération γ , les trois cas particuliers suivants (a): $\alpha_1 = \pi/2$ et $\alpha_2 = \pi/2$; (b): $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi/2$; (c): $\alpha_1 = \pi/2$ et $\alpha_2 = 0$. Montrer que pour (a) on retrouve les résultats classiques du cours pour la machine d'Atwood. Justifier qu'en (b), l'accélération est indépendante de M_1 . Expliquer pourquoi on obtient une accélération négative en (c)

[3] On rajoute sur chaque masse des ressorts de traction-compression, de constantes de raideur respectives K_1 et K_2 . Les ressorts de masse supposée négligeable devant celles de M_1 et M_2 , sont par ailleurs fixés sur une partie immobile du bâti (cf. figure n°4). Établir la nouvelle équation du mouvement par la méthode de votre choix. En déduire la pulsation de résonance.

[4] Il peut sembler a priori surprenant que la pulsation obtenue à la question [3] soit indépendante à la fois de α_1 et α_2 . On se propose dès lors de refaire le calcul pour deux configurations plus simples, à savoir (a): $\alpha_1 = \pi/2$ et $\alpha_2 = \pi/2$; (b): $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = 0$. Pour le cas (b), on supposera en outre que $M = 0$ (c'est à dire que le fil n'entraîne plus la poulie). Montrer finalement que pour ce cas on retrouve un résultat tout à fait classique, à savoir $\omega = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{M_1 + M_2}}$. En revenant à la question [3], justifier finalement que l'on retrouve pour ω le résultat de la configuration (a) de la question [4], et expliquer enfin quelle est l'influence de α_1 et α_2 sur la statique du système.

Barème envisagé : 6 points pour chaque exercice ; 8 points pour le problème.

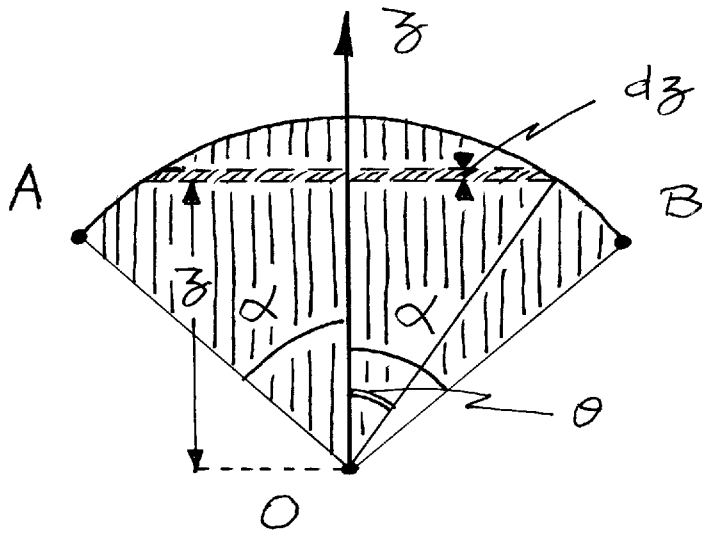


Figure n° 1

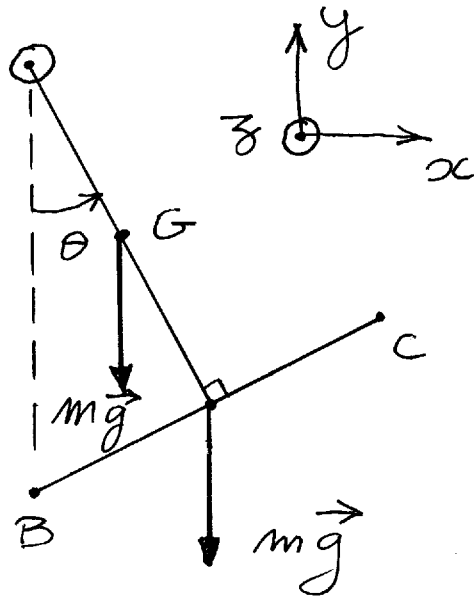
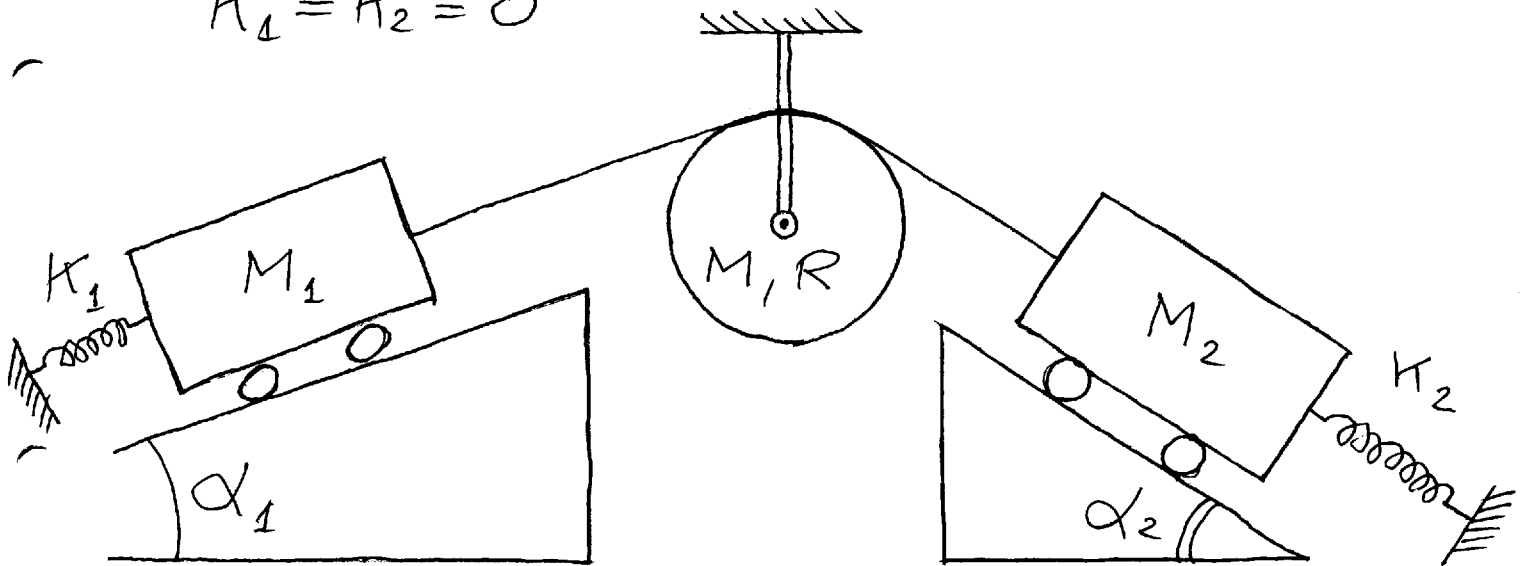


Figure n° 2

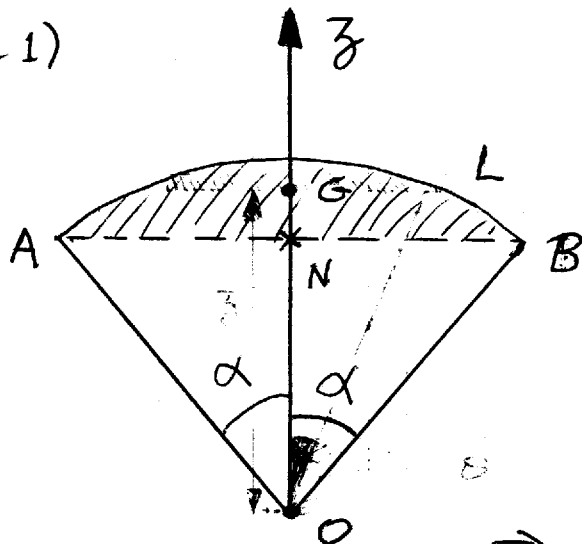
N.B: Pour la figure n° 3,
il faut prendre
 $K_1 = K_2 = 0$

Figures n° 3 & 4



Correction du Pb. sur la géométrie des masses

I-1)



$$z_G = \frac{\int_L z dm}{\int_L dm}$$

$$\begin{cases} dm = \lambda dl & dl = R d\theta \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

$$z_G = \frac{\lambda \int_{-\alpha}^{+\alpha} z R d\theta}{\lambda \int_{-\alpha}^{+\alpha} R d\theta}$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} R^2 \cos \theta d\theta}{2R\alpha}$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta \Rightarrow \boxed{z_G = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}}$$

I-2)

$$dm = \sigma ds = \sigma dy dz = \sigma \rho d\rho d\theta$$

$$z = \rho \cos \theta$$

$$z_G = \frac{\int_S z dm}{\int_S dm} = \frac{\int_S z \rho d\rho d\theta}{\int_S \rho d\rho d\theta}$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{\int_S \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta}{\int_S \rho d\rho d\theta}$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{\int_0^R \rho^2 d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_0^R \rho d\rho \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta}$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{\frac{R^3}{3} \cdot \cancel{2} \sin \alpha}{\frac{R^2}{2} \cdot \cancel{2} \alpha} \Rightarrow \boxed{z_G = \frac{2RS \sin \alpha}{3\alpha}}$$

I-3) Position du centre d'inertie du segment circulaire (portion hachurée en rouge)

$$z_G = \frac{\int_S z dm}{\int_S dm} = \frac{\int_S z ds}{\int_S ds}$$

$$dm = \sigma ds \quad ; \quad ds = 2R \sin \theta dz \quad (\text{cf Figure})$$

$$z = R \cos \theta \Rightarrow dz = -R \sin \theta d\theta$$

$$z_G = \frac{\int_0^\alpha R \cos \theta \cdot 2R \sin \theta (-R \sin \theta d\theta)}{\int_0^\alpha 2R \sin \theta (-R \sin \theta d\theta)}$$

$$\Rightarrow z_G = \frac{R \int_0^\alpha \cos \theta \sin^2 \theta d\theta}{\int_0^\alpha \sin^2 \theta d\theta}$$

$$= \frac{R \int_0^\alpha \sin^2 \theta d(\sin \theta)}{\int_0^\alpha \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_G = \frac{2R \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin 2\alpha)}}$$

I.4)

$$\alpha = \pi/2$$

$$\alpha = \pi$$

$$z_G = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}$$

$$2R/\pi$$

$$0$$

$$z_G = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha}$$

$$4R/3\pi$$

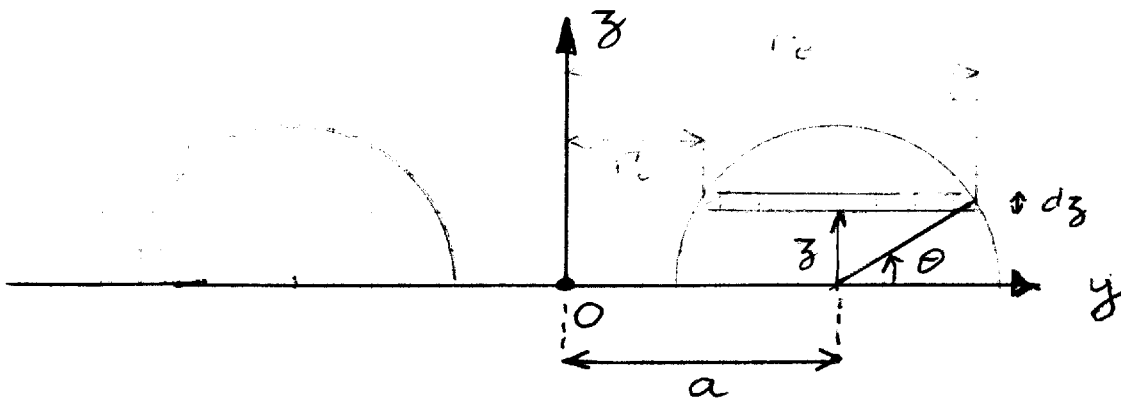
$$0$$

$$z_G = \frac{2R \sin^3 \alpha}{3(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$$

$$4R/3\pi$$

$$0$$

II



$$dV = \pi (r_e^2 - r_i^2) dz$$

(Surface d'une couronne circulaire)

$$\left. \begin{aligned} r_e &= a + R \cos \theta \\ r_i &= a - R \cos \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_e^2 - r_i^2 = a^2 + R^2 \cos^2 \theta + 2aR \cos \theta - a^2 - R^2 \cos^2 \theta + 2aR \cos \theta = 4aR \cos \theta$$

$$dz = d(R \sin \theta) = R \cos \theta d\theta$$

$$\Rightarrow dV = 4\pi a R^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$z_G = \int_V z dm / \int_V dm = \rho \int_V z dV / \rho \int_V dV$$

$$\Rightarrow z_G = \int_V R \sin \theta \cdot 4\pi a R^2 \cos^2 \theta d\theta / \int_V 4\pi a R^2 \cos^2 \theta d\theta$$

$$= R \int_V \sin \theta \cos^2 \theta d\theta / \int_V \cos^2 \theta d\theta$$

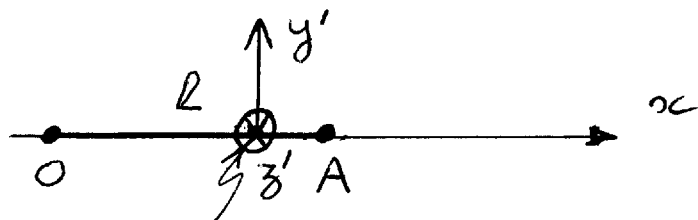
$$= -R \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d(\cos \theta) / \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{z_G = \frac{4R}{3\pi}}$$

Remarque: On obtient le même résultat en ce qui concerne le demi-disque

III.)



$$\lambda = kx^2 \quad dm = \lambda dx$$

$$x_G = \frac{\int_L x dm}{\int_L dm} = \frac{\int_L \lambda x dx}{\int_L \lambda dx}$$

$$= \frac{k \int_0^l x^3 dx}{k \int_0^l x^2 dx} = \frac{\int_0^l x^3 dx}{\int_0^l x^2 dx}$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{3}{4} l$$

$$J_{y'y'}(G, S) = J_{z'z'}(G, S) = \int_{0A} x'^2 dm = \int_{-\frac{3l}{4}}^{\frac{l}{4}} x'^2 \lambda dx'$$

$$\lambda = kx^2 = k\left(\frac{3}{4}l + x'\right)^2$$

$$\Rightarrow J_{y'y'} = J_{z'z'} = k \int_{-\frac{3l}{4}}^{\frac{l}{4}} x'^2 \left(\frac{3}{4}l + x'\right)^2 dx'$$

$$= k \int_{-\frac{3l}{4}}^{\frac{l}{4}} \left\{ \frac{9}{16} l^2 x'^2 + x'^4 + \frac{3}{2} l x'^3 \right\} dx'$$

$$= k \left[\frac{9l^2}{3 \times 16} x'^3 + \frac{x'^5}{5} + \frac{3}{8} l x'^4 \right]_{-\frac{3l}{4}}^{\frac{l}{4}} = \frac{kl^5}{80}$$

$$M = \int_0^l kx^2 dx = k \frac{l^3}{3} \Rightarrow k = \frac{3M}{l^3}$$

$$\Rightarrow J_{y'y'}(G, S) = J_{z'z'}(G, S) = \frac{3Me^2}{80}$$

$$\underline{\underline{J}}(G, S) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3Me^2}{80} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3Me^2}{80} \end{pmatrix} (x', y', z')$$

Exercice n° 2

puisque une position quelconque du système est déterminée par le seul angle $\theta(t)$ et que le mouvement est sans frottement, utilisons le théorème de l'énergie cinétique.

le système est en rotation autour de O_{xy} avec le vecteur rotation instantané $\frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{k}$

d'après le théorème d' Huygens, le moment d'inertie de la barre OA par rapport à O_{xy} est

$$J_{O_{xy}} = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2$$

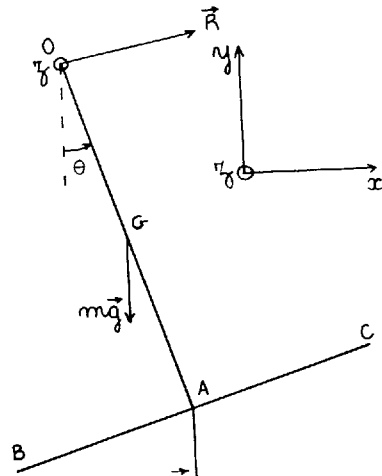
l'énergie cinétique de la barre OA est $\mathcal{E}_{c1} = \frac{1}{2} J_{O_{xy}} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{6} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

d'après le théorème de Koenig, l'énergie cinétique de la barre BC est

$$\mathcal{E}_{c2} = \mathcal{E}_{c02} + \frac{1}{2} m v_{A/R}^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{13}{24} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

l'énergie cinétique du système est $\mathcal{E}_c = \left(\frac{1}{6} + \frac{13}{24}\right) ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{17}{24} ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

les forces extérieures sont les poids, et la réaction de l'axe qui ne travaille pas



puisque il n'y a pas de frottement :

la puissance des forces extérieures est $\mathcal{P} = m\vec{g} \cdot \vec{v}_{G/R} + m\vec{g} \cdot \vec{v}_{A/R}$

$$\vec{OG} = \frac{l}{2} (\sin\theta \cdot \vec{i} - \cos\theta \cdot \vec{j}) \text{ et } \vec{OA} = 2\vec{OG}$$

$$\vec{v}_{G/R} = \frac{l}{2} (\cos\theta \cdot \vec{i} + \sin\theta \cdot \vec{j}) \frac{d\theta}{dt} \text{ et } \vec{v}_{A/R} = 2\vec{v}_{G/R}$$

donc $\mathcal{P} = -mgx + \frac{1}{2} l \sin\theta \frac{d\theta}{dt} - mgx + l \sin\theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2} mgl \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$

d'après le théorème de l'énergie cinétique $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}$,

soit $\frac{17}{12} ml^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{3}{2} mgl \sin\theta \frac{d\theta}{dt}$

- l'équation du mouvement est

$$\boxed{\frac{17}{12} l \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{3}{2} g \sin\theta = 0}$$

soit $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{18}{17} \frac{g}{l} \sin\theta = 0$, qui devient $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{18}{17} \frac{g}{l} \theta = 0$ dans le cas des petits mouvements.

la période des petits mouvements est $T = 2\pi \sqrt{\frac{17}{18} \frac{l}{g}}$, soit

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{17}{2} \frac{l}{g}}}$$

Examen de Mécanique du solide indéformable

Exercice 1: Équilibre et mouvement d'une balançoire

On considère une balançoire constituée d'une tige de longueur $L = 2(a + b)$, de masse supposée négligeable. En son milieu, au point O, une liaison rotoïde parfaite assure la rotation sans frottement dans le plan de la figure (cf. schéma n°1 sur feuille ci-jointe). Deux ressorts de constante de raideur k , de longueur à vide h , de masse négligeable, sont montés à la distance a du point O. Aux deux extrémités de la balançoire sont installées deux personnes de masse m_1 et m_2 . On supposera, pour fixer le sens du mouvement statique de l'ensemble que $m_1 > m_2$.

① Le système est à l'équilibre. Écrire la relation fondamentale de la statique et en déduire l'expression de θ_s (angle entre la balançoire et l'horizontale à l'équilibre) en fonction de m_1 , m_2 , g , a , b et k . Donner sa valeur numérique en prenant: $m_1 = 75 \text{ kg}$; $m_2 = 65 \text{ kg}$; $a = 0.3 \text{ m}$; $b = 1.2 \text{ m}$; $k = 4.10^3 \text{ N/m}$.

② On étudie le mouvement d'oscillation libre de ce système. Écrire le théorème du moment cinétique en O. En effectuant le changement de variable $\Theta = \theta - \theta_s$, montrer que l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme $\ddot{\Theta} + \omega_0^2 \Theta = 0$. Donner l'expression de la pulsation de résonance. Retrouver l'équation du mouvement par la méthode énergétique de votre choix. Calculer la valeur numérique de la période des oscillations libres.

Exercice 2: Mouvement de translation de deux chariots couplés

On considère un système mécanique simple constitué de deux petits chariots montés l'un au dessus de l'autre (cf. figure n°2). Les mouvements s'effectuent sans frottement. Les ressorts de traction-compression sont supposés sans inertie. On repère le mouvement absolu de chaque chariot par rapport à un support fixe respectivement par x et y pour le grand (et le petit) chariot.

① Écrire l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un tel système.

② Appliquer les équations de Lagrange en x et en y pour établir les deux équations de mouvement. Mettre ces équations sous forme matricielle dans le cas où l'on note $K = \alpha k$ et $M = \beta m$.

- ③ Étudier les oscillations libres en posant $x(t) = X \cos \omega t$ et $y(t) = Y \cos \omega t$. On pourra noter aussi $\omega_0 = 2k / m$. En écrivant l'équation de compatibilité, déduire les deux pulsations de résonance.
- ④ Étudier les deux cas particuliers $\alpha = 0$ et $\alpha \rightarrow \infty$. Proposer pour chaque cas une interprétation mécanique des mouvements possibles.

Exercice 3: Mouvement d'un solide composé d'un disque et deux tiges

On considère un disque mince de rayon R , de masse surfacique σ et de centre C . Deux tiges de longueur L , de masse linéique λ , de centre d'inertie G_1 et G_2 , sont montées à 45° par rapport à l'axe vertical du disque (cf figure n°3). Le système repose en équilibre au point A , base du disque où une petite encoche de taille négligeable a été aménagée à cet effet pour monter la tête d'une pointe effilée par ailleurs fixe.

- ① Calculer la position du centre d'inertie G de l'ensemble de ces trois solides. Calculer numériquement OG et AG , avec les valeurs numériques suivantes : $R = 0.05 \text{ m}$; $\sigma = 1 \text{ kg / m}^2$; $L = 0.3 \text{ m}$; $\lambda = 1 \text{ kg / m}$. Est-ce que l'équilibre peut-être stable ? Expliquer votre réponse.
- ② Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe \vec{z} de chaque solide élémentaire (en A_1 pour la tige 1, en A_2 pour la tige 2 et en C pour le disque). Utiliser le théorème de Huyghens correctement appliqué pour évaluer le moment d'inertie total par rapport au point A qui est fixe au cours du mouvement.
- ③ On suppose que le mouvement ne s'effectue que dans le plan de la figure, et l'on repère la rotation d'ensemble du solide par la coordonnée θ relative à celle du disque autour du point A . Écrire le théorème du moment cinétique en A . En déduire l'équation du mouvement.
- ④ Calculer alors la pulsation pour les oscillations du mouvement libre. Effectuer l'application numérique avec les données de la question ①. Calculer la valeur numérique de la période des oscillations. Que se passerait-il pour d'autres données numériques telles que $AG = 0$?

Barème envisagé : Respectivement 6, 6 et 8 points pour les exercices 1, 2 et 3.

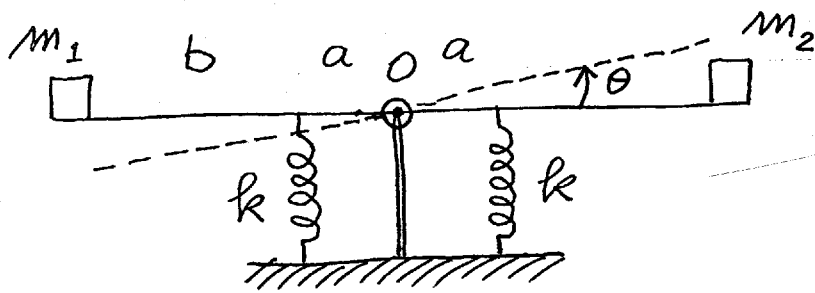


Figure n° 1

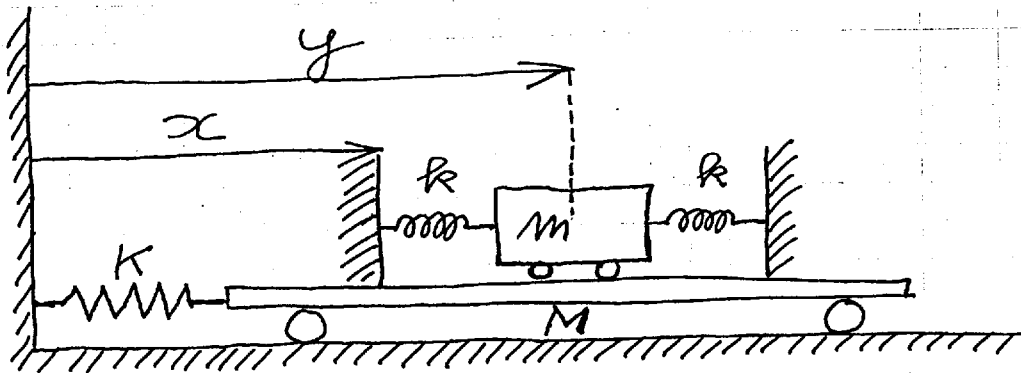


Figure n° 2

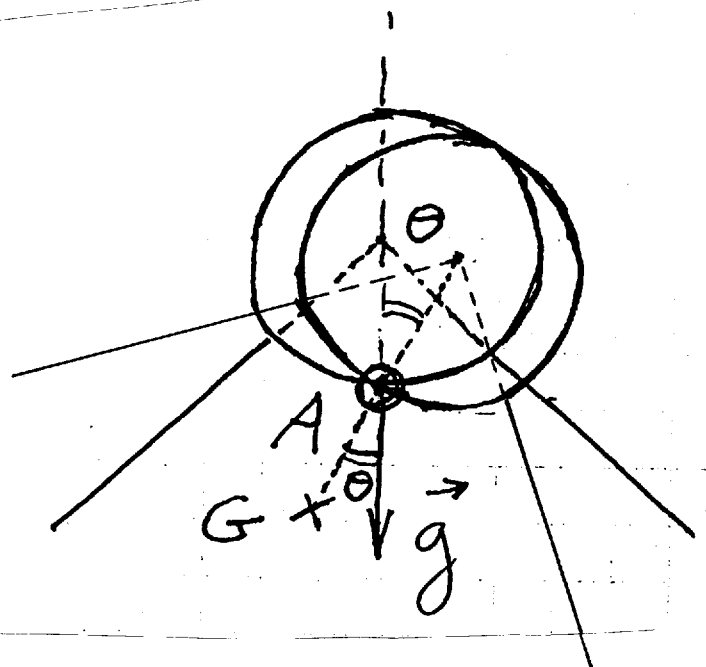
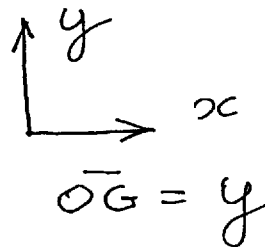
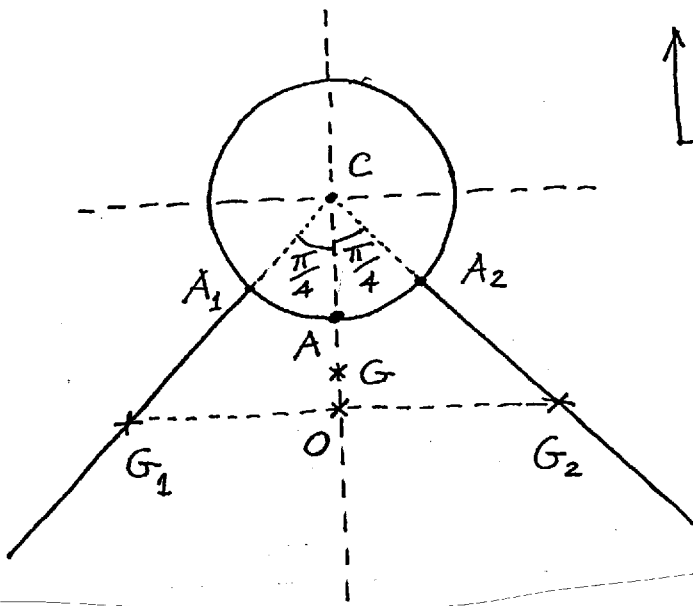
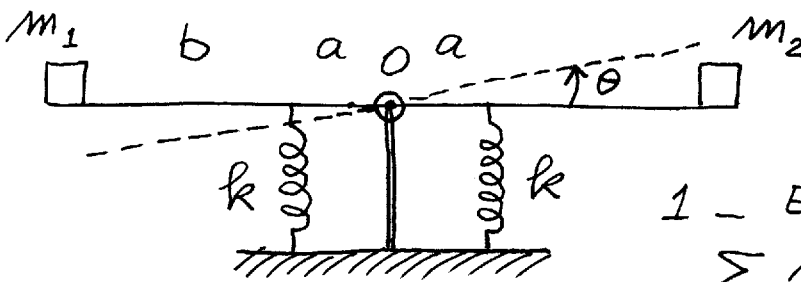


Figure n° 3

Examen de Mécanique

Exercice 1 : Equilibre et mouvement d'une balançoire



$m_1 > m_2$

1 - Etude statique

$$\sum \vec{M}_O \vec{F}_{ext} = 0$$

$$\Rightarrow m_1 g(a+b) - 2ka^2 \sin \theta - m_2 g(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow \theta_{sta} = \text{Arc sin} \frac{(m_1 - m_2)g(a+b)}{2ka^2} \neq 90^\circ$$

2 - Etude dynamique

$$\frac{d\vec{J}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O \vec{F}_{ext} = J(O) \ddot{\theta}$$

avec $J(O) = (m_1 + m_2)(a+b)^2$ Théorème d'Huyghens

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)(a+b)^2 \ddot{\theta} = (m_1 - m_2)g(a+b) - 2ka^2 \theta$$

soit en notant $\theta = \theta - \theta_{sta}$

$$\Rightarrow (m_1 + m_2)(a+b)^2 \ddot{\theta} + 2ka^2(\theta + \theta_{sta}) = (m_1 - m_2)g(a+b)$$

à l'équilibre on a $\ddot{\theta} = 0$, et $\theta = 0$

$$\Rightarrow 2ka^2 \theta_{sta} = (m_1 - m_2)g(a+b) \quad (\text{cf. 1})$$

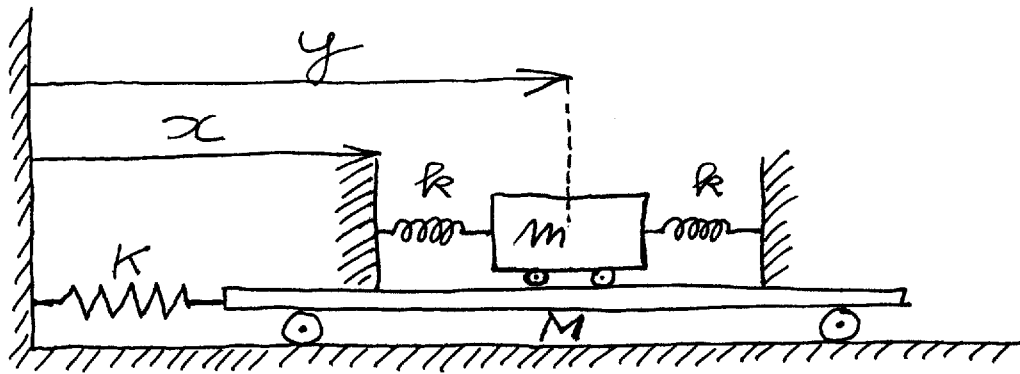
$$\text{et il reste : } (m_1 + m_2)(a+b)^2 \ddot{\theta} + 2ka^2 \theta = 0,$$

d'où la pulsation de résonance :

$$\omega_0^2 = \frac{2ka^2}{(m_1 + m_2)(a+b)^2} \Rightarrow T_0 = \pi \left(1 + \frac{b}{a}\right) \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)}{k}}$$

$$T_0 = 4,15 \text{ s}$$

Exercice 2: Mouvement de translation de deux chariots couplés



$$1 - \begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \\ E_p = 2 \times \frac{1}{2} k (y-x)^2 + \frac{1}{2} K x^2 \end{cases}$$

$$2 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow M \ddot{x} + (2k + K)x - 2ky = 0$$

De même pour Lagrange en y :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} + \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$$

Soit en notant $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$; $K = \alpha k$; $M = \beta m$

$$\Rightarrow m \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 + \alpha & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3 - x(t) = X \cos \omega t ; y(t) = Y \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (1 + \frac{\alpha}{2}) \omega_0^2 - \beta \omega^2 & -\omega_0^2 \\ -\omega_0^2 & \omega_0^2 - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[(1 + \frac{\alpha}{2}) \omega_0^2 - \beta \omega^2 \right] (\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^4 = 0$$

$$\Rightarrow \beta \omega^4 - (1 + \frac{\alpha}{2} + \beta) \omega_0^2 \omega^2 + \frac{\alpha}{2} \omega_0^4 = 0 \quad (1)$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2\beta} \left[(1 + \frac{\alpha}{2} + \beta) \pm \sqrt{\Delta} \right], \text{ avec :}$$

$$\Delta = \left(1 + \frac{\alpha^2}{4} + \beta^2 + \alpha + 2\beta - \alpha\beta \right) \omega_0^4$$

4- Pour $\alpha = 0$, $\Delta = (1 + \beta)^2 \omega_0^4$

$\Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{(1 + \beta)\omega_0^2 \pm (1 + \beta)\omega_0^2}{2\beta}$

d'où $\omega_1^2 = 0$ (mode cinématique)

et $\omega_2^2 = \left(\frac{1 + \beta}{\beta}\right)\omega_0^2 = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\omega_0^2$

Pour $\alpha \rightarrow \infty$, $\Delta \approx \left(\frac{\alpha}{2}\omega_0^2\right)^2$

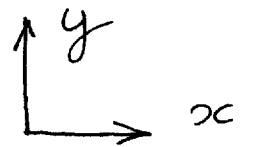
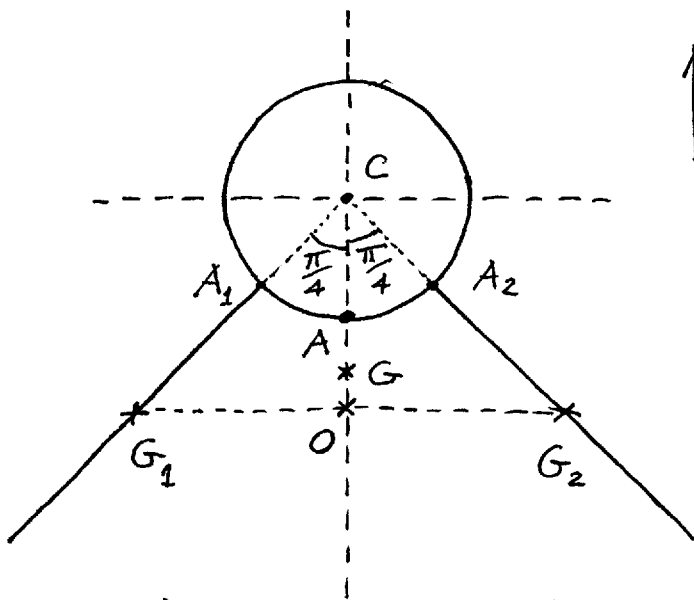
En fait pour $\alpha \rightarrow \infty$, l'équation bicarrée (1) peut s'écrire :

$\beta\omega^4 - \frac{\alpha}{2}\omega_0^2\omega^2 + \frac{\alpha}{2}\omega_0^4 = 0$

négligeable, d'où $\omega^2 = \omega_0^2$

(normal puisque $H \rightarrow \infty$, d'où solide M rigidement lié au support) -

Exercice 3: Mouvement d'un solide composé d'un disque et de deux tiges



$\vec{OG} = y$

1- $\sum_i \vec{GM}_i \times m_i \vec{v}_i = 0$

Définition du centre d'inertie

$\Rightarrow \vec{GC} \times m_{cyl} + \vec{GG}_1 \times m_{tige} + \vec{GG}_2 \times m_{tige} = 0$

$\Rightarrow (\vec{GO} + \vec{OC}) \times m_{cyl} + \left\{ (\vec{GO} + \vec{OG}_1) + (\vec{GO} + \vec{OG}_2) \right\} \times m_{tige} = 0$

$\Rightarrow \vec{OG} (m_{cyl} + 2m_{tige}) = \vec{OC} m_{cyl}$, car

$(\vec{OG}_1 + \vec{OG}_2) \times m_{tige} = 0$

... / ...

$$\Rightarrow \vec{OG} = \frac{\vec{OC} m_{cyl}}{m_{cyl} + 2m_{tige}} \Rightarrow y_G = \frac{y_C m_{cyl}}{m_{cyl} + 2m_{tige}}$$

$$\text{or } y_C = \left(R + \frac{L}{2}\right) \cos \frac{\pi}{4} = \left(R + \frac{L}{2}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} m_{cyl} = \pi R^2 \times \sigma \\ m_{tige} = L \times \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_G = \frac{\left(R + \frac{L}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} * \pi R^2 \sigma}{\pi R^2 \sigma + 2L \lambda}$$

A.N $y_G = 0,0164 \text{ m}$

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que

$$y_G < y_A = \left(R + \frac{L}{2}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} - R = 0,0914$$

D'où $y_G < y_A \Rightarrow$ équilibre stable

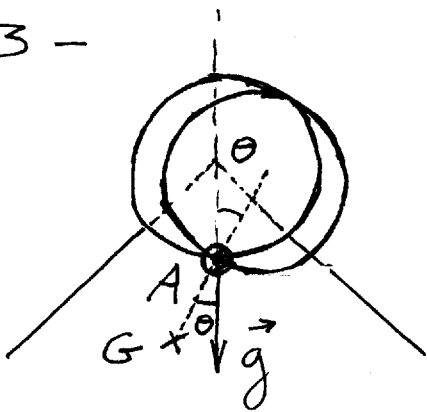
$$2 - I_{tige}^{A_{1,2}} = \int_0^L r^2 dm = \lambda \int_0^L r^2 dr = \lambda \frac{L^3}{3}$$

$$I_{tige}^A = \lambda \frac{L^3}{3} + \lambda L (\bar{A}_1 A)^2 = \lambda \frac{L^3}{3} + \lambda L \times \left(R + \frac{\pi}{4}\right)^2 = \lambda L \left(\frac{L^2}{3} + \frac{\pi^2 R^2}{16}\right)$$

$$I_{cyl}^C = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} \sigma \pi R^4$$

$$I_{cyl}^A = \frac{1}{2} \sigma \pi R^4 + \sigma \pi R^2 \times R^2 = \frac{3}{2} \sigma \pi R^4$$

3 -



$$\vec{\sigma}_A = J_A \vec{\Omega}$$

$$= - \left\{ 2\lambda L \left(\frac{L^2}{3} + \frac{\pi^2 R^2}{16} \right) + \frac{3}{2} \sigma \pi R^4 \right\} \dot{\theta} \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \vec{M}_A \vec{Mg} = \vec{AG} \wedge \vec{Mg}$$

$$M = 2\lambda L + \pi R^2 \sigma$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \vec{AG} (2\lambda L + \pi R^2 \sigma) g \times \sin \theta \times \vec{k}$$

$$\Rightarrow \left\{ 2\lambda L \left(\frac{L^2}{3} + \frac{\pi^2 R^2}{16} \right) + \frac{3}{2} \sigma \pi R^4 \right\} \ddot{\theta} + \left\{ \frac{(R + \frac{L}{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} \times \pi R^2 \sigma}{\pi R^2 \sigma + 2\lambda L} \right\} (2\lambda L + \pi \sigma^2 \sigma) g \theta = 0$$

4- $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$, avec :

$$\omega_0^2 = \frac{\left[(R + \frac{L}{2}) \frac{\sqrt{2}}{2} \times \pi R^2 \sigma \right] g}{2\lambda L \left(\frac{L^2}{3} + \frac{\pi R^2}{16} \right) + \frac{3}{2} \sigma \pi R^4} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2,58 \text{ s}$$

Pour $\overline{AG} = 0$, l'équilibre devient indifférent et $T \rightarrow +\infty$

Examen de Mécanique du solide indéformable

Exercice: Oscillations d'un pendule composé

On considère un pendule composé, constitué d'un disque homogène de centre d'inertie G , de masse m et de rayon a fixé en G à une tige très fine, homogène de centre d'inertie C , de masse m' et de longueur ℓ . Il existe un petit dispositif permettant de lier rigidement le disque et la tige, ou bien au contraire de mettre en rotation sans frottement le disque autour de G .

① Dans le premier cas (disque et tige rigidement liés), donner l'expression de la période T_1 des petites oscillations du pendule composé dans le champ de pesanteur vertical \vec{g} . Application numérique pour $m = 0,02$ kg ; $m' = 0,005$ kg ; $a = 0,05$ m ; $\ell = 0,25$ m ; $g = 10$ m s⁻².

② Le disque est mis en rotation autour de G à la vitesse angulaire uniforme ω_0 . Le disque et la tige peuvent tourner librement l'un par rapport à l'autre. On écarte alors le pendule composé de sa position d'équilibre par rapport à la verticale. Est-ce que l'on va observer des fluctuations de la vitesse de rotation ω_0 ? Justifier votre réponse sur des arguments mécaniques. Calculer la nouvelle période T_2 pour les petites oscillations. Application numérique avec les mêmes données que pour la question ①, et montrer que $T_1 > T_2$.

Problème: Équilibrage d'une machine tournante

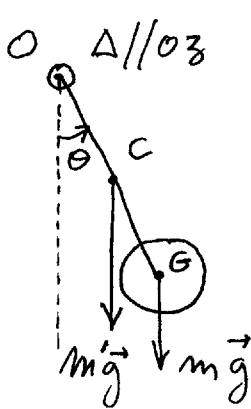
On considère une "machine tournante" élémentaire constituée d'un quart de disque, homogène, de rayon a , de masse m et d'épaisseur négligeable, solidaire d'une tige verticale (le long de l'axe Oz) très mince, de masse supposée négligeable. Ce quart de disque est dans le plan xOz , le point O étant l'intersection de ses deux arêtes. La tige verticale supportée par des liaisons pivots parfaites (sans frottement) autorise de mettre en rotation la plaque avec une vitesse de rotation $\dot{\theta}$ autour de l'axe vertical Oz . Pour ce faire un moteur exerce sur la tige un couple moteur de moment $\Gamma \vec{u}_z$, où \vec{u}_z est le vecteur directeur le long de Oz .

- 1] Déterminer la position du centre d'inertie G de la plaque (du quart de disque).
- 2] Calculer le moment d'inertie J du quart de disque par rapport à Oz.
- 3] Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}(0)$ du quart de disque évalué en O pour son mouvement de rotation autour de Oz. Mettre cette quantité sous forme d'une intégrale qui sera calculée sur la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, où \vec{u}_y est le vecteur directeur perpendiculaire à la plaque. Montrer finalement que
$$\vec{\sigma}(0) = \frac{m a^2 \dot{\theta}}{2 \pi} \left(-\vec{u}_x + \frac{\pi}{2} \vec{u}_z \right).$$
- 4] Écrire le théorème du moment dynamique projeté sur l'axe Oz. Quelle sera la nature du mouvement de rotation ? Est-ce qu'un mouvement stationnaire (à $\dot{\theta}(t) = \text{cte}$) semble possible ?
- 5] En fait, cette stabilisation est apportée par les forces de frottement (de type visqueux) qui s'exercent au cours du mouvement et qui peuvent être modélisées sous la forme $d^2\vec{f} = -\lambda \vec{v} d^2S$, où λ est un coefficient constant positif, et où S représente la surface totale du quart de disque, et \vec{v} la vitesse absolue de ce dernier par rapport au référentiel fixe. Intégrer cette équation différentielle sur le quart de disque en faisant usage de coordonnées polaires et aboutir à une expression de la force totale de frottement \vec{f}' en fonction de $\omega = \dot{\theta}$.
- 6] Appliquer alors le théorème du moment dynamique en projection sur l'axe Oz, et montrer qu'un mouvement stationnaire est cette fois possible (contrairement à la question 4] pour lequel $\omega = \frac{16}{\pi} \frac{\Gamma}{\lambda a^4}$. Commenter ce résultat.
- 7] Déterminer la résultante \vec{R} et le moment dynamique en O, $\vec{m}(O)$ des actions exercées par la plaque sur la tige autour de l'axe Oz. Simplifier les expressions obtenues pour le cas d'une rotation rapide ($\lambda a^2 \ll m\omega$). Expliquer en quoi une telle rotation rapide peut être nuisible à l'intégrité de la "machine tournante".
- 8] En vue de limiter l'influence néfaste de ces efforts, une masse M est montée sur la plaque en A, à la distance ℓ de l'axe Oz et à la côte h de l'axe horizontal Ox. Calculer la résultante \vec{R} et le moment dynamique en O, $\vec{m}(O)$ du nouveau système (plaque + masse M). Montrer que la résultante dynamique est nulle lorsque $M\ell = \frac{4}{3\pi} a m$ (équilibre statique).
- 9] Montrer alors que le moment dynamique $\vec{m}(O)$, quant à lui, devient indépendant de ω lorsque $M\ell h = \frac{1}{2\pi} m a^2$ (équilibre dynamique). Citer une application d'une telle procédure d'équilibre.

Barème envisagé : 6 points pour l'exercice ; 14 points pour le problème.

Exercice: Oscillations d'un pendule composé

1



$$J_{\Delta} = J_D + J_T$$

$$\text{avec } \begin{cases} J_T = \frac{1}{3} m' l^2 \\ J_D = m l^2 + \frac{1}{2} m a^2 \end{cases}$$

Théorème du moment cinétique
 $J_{\Delta} \ddot{\theta} = -m' g \frac{l}{2} \sin \theta - m g l \sin \theta$
 soit pour $\theta \ll 1$, $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \left(\frac{m'}{2} + m \right) \frac{g l}{J_{\Delta}} \theta = 0 \Rightarrow \Omega_1 = \left[\left(\frac{m'}{2} + m \right) \frac{g l}{J_{\Delta}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\Omega_1} = 2\pi \sqrt{\frac{m' l^2 + m \left(l^2 + \frac{a^2}{2} \right)}{\left(\frac{m'}{2} + m \right) g l}}$$

A.N $m = 0,02 \text{ kg}$; $m' = 0,005 \text{ kg}$
 $a = 0,05 \text{ m}$; $l = 0,25 \text{ m}$; $g = 10 \text{ m/s}^2$

$$T_1 = 0,984 \text{ s}$$

2 L'application du théorème du moment cinétique en G, au disque, dans le référentiel R lié à celui-ci donne en projection le long de Gz:

$$\frac{1}{2} m a^2 \frac{d\omega}{dt} = 0 \Rightarrow \omega = \text{cte} = \omega_0$$

Calculons le moment cinétique total en O:

$$\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}_{OT} + \vec{\sigma}_{OD}; \quad \vec{\sigma}_{OT} = \frac{1}{3} m' l^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_{OD} = \vec{OG} \wedge m \vec{V}_G + \frac{m}{2} a^2 \omega_0 \vec{k} \quad \text{d'après le théorème de Koenig}$$

Théorème du moment cinétique:

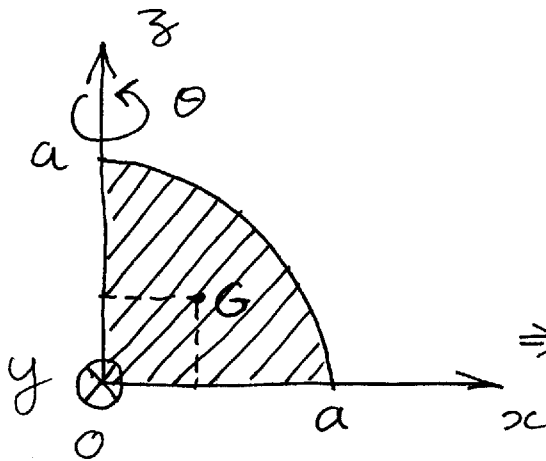
$$\frac{1}{3} m' l^2 \ddot{\theta} + m l^2 \ddot{\theta} = - \left(\frac{m'}{2} + m \right) g l \sin \theta$$

$$\Rightarrow T_2 = 2\pi \sqrt{\left(\frac{\frac{m'}{2} + m}{3} \right) \frac{l}{g}}$$

A.N : $T_2 = 0,975 \text{ s}$
 $T_1 > T_2$ ceci est normal puisqu'il existe le terme supplémentaire en $m \frac{a^2}{2}$ pour T_1 .

Problème : Equilibrage d'une machine tournante

1



$$M = \frac{\pi a^2}{4} \times \sigma$$

$$x_G = z_G \text{ par symétrie}$$

$$m x_G = \iint_S x \sigma ds$$

$$\Rightarrow \frac{\pi a^2}{4} x_G = \int_0^a \int_0^{\pi/2} r \cos \varphi \times r dr d\varphi$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{4}{\pi a^2} \int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi$$

$$= \frac{4}{\pi a^2} \times \frac{a^3}{3} \Rightarrow \boxed{x_G = \frac{4a}{3\pi}} \approx 0,424a$$

$$2 \quad J = \iint_S x^2 \sigma ds = \int_0^a \int_0^{\pi/2} (r \cos \varphi)^2 \sigma r dr d\varphi$$

$$= \frac{4m}{\pi a^2} \int_0^a r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi$$

$$= \frac{4m}{\pi a^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow J = \frac{1}{4} m a^2$$

3 Soit un point $P \in S$ tel que :

$$\vec{OP} = (\cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y) r$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{P/R} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z \wedge \vec{OP} = r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{u}_y$$

Le moment cinétique en O de la masse élémentaire d^2m située autour du point P est $d^2\sigma(t) = \vec{OP} \wedge \vec{v}_{P/R} d^2m$

$$\Rightarrow d^2\sigma(t) = r (\cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y) \wedge r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{u}_y$$

$$= r^2 \dot{\theta} \cos \varphi (-\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_z)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(t) = \iint_S \vec{OP} \wedge \vec{v}_{P/R} d^2m$$

$$= - \int_0^a \int_0^{\pi/2} r^2 \dot{\theta} \sin \varphi \cos \varphi \times \sigma r dr d\varphi \vec{u}_x$$

$$+ \int_0^a \int_0^{\pi/2} r^2 \dot{\theta} \cos^2 \varphi \times \sigma r dr d\varphi \vec{u}_z$$

$$= \frac{4m}{\pi a^2} \dot{\theta} \left[- \int_0^a r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \vec{u}_x \right. \\ \left. + \int_0^a r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \vec{u}_z \right]$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(0) = \frac{4m}{\pi a^2} \dot{\theta} \frac{a^2}{4} \left(-\frac{1}{2} \vec{u}_x + \frac{\pi}{4} \vec{u}_z \right)$$

$$\boxed{\vec{\sigma}(0) = \frac{ma^2 \dot{\theta}}{2\pi} \left(-\vec{u}_x + \frac{\pi}{2} \vec{u}_z \right)}$$

4 Théorème du moment cinétique appliqué au quart de disque et projeté le long de Oz

$$\frac{1}{4} ma^2 \ddot{\theta} = \Gamma = \text{cte}, \text{ d'où il existe}$$

une accélération angulaire uniforme, et donc aucun régime stationnaire n'est possible.

$$\begin{aligned} \text{5 } d^2 \vec{f} &= -\lambda \vec{V}_{P/R} d^2 s = -\lambda r \dot{\theta} \cos \varphi \vec{u}_y \times r dr d\varphi \\ &= -\lambda \dot{\theta} r^2 dr \cos \varphi d\varphi \vec{u}_y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{f} = -\iint_S d^2 \vec{f} = -\lambda \dot{\theta} \int_0^a r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f} = -\frac{1}{3} \lambda \dot{\theta} a^3 \vec{u}_y}$$

6 Le moment dynamique élémentaire associé à la force de frottement s'écrit :

$$d^2 \vec{M}'(0) = \vec{OP} \wedge d^2 \vec{f} = -\lambda \vec{OP} \wedge \vec{V}_{P/R} d^2 s$$

$$\text{on } d^2 \vec{\sigma}(0) = \vec{OP} \wedge \vec{V}_{P/R} d^2 m = \sigma \vec{OP} \wedge \vec{V}_{P/R} d^2 s$$

$$\Rightarrow d^2 \vec{M}'(0) = -\frac{\lambda}{\sigma} d^2 \vec{\sigma}(0) = -\frac{\pi \lambda a^2}{4m} d^2 \vec{\sigma}(0)$$

$$\Rightarrow \vec{M}'(0) = -\frac{\pi}{4} \frac{\lambda a^2}{m} \times \frac{1}{2\pi} ma^2 \dot{\theta} \left(-\vec{u}_x + \frac{\pi}{2} \vec{u}_z \right)$$

$$= \frac{1}{8} \lambda a^4 \dot{\theta} \left(\vec{u}_x - \frac{\pi}{2} \vec{u}_z \right)$$

Théorème du moment dynamique en projection sur l'axe Oz :

$$\frac{1}{4} ma^2 \ddot{\theta} = \Gamma - \frac{\pi}{16} \lambda a^4 \dot{\theta}$$

Il existe un régime stationnaire qui correspond à $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte}$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \dot{\theta} = \frac{16}{\pi} \frac{\Gamma}{\lambda a^4}}$$

$$\boxed{7} \quad d^2\vec{P} = \vec{V}_{M/R} d^2m = \sigma \dot{\theta} r^2 dz \cos\varphi d\varphi \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \frac{4m}{\pi a^2} \dot{\theta} \int_0^a r^2 dz \int_0^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi \vec{u}_y$$

$$= \frac{4a}{3\pi} m \dot{\theta} \vec{u}_y$$

Théorème de la résultante dynamique :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{f} + m\vec{g} + \vec{R}$$

$$\text{or } \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4a}{3\pi} m \dot{\theta} \vec{u}_y \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{4a}{3\pi} m \omega \vec{u}_y \right) = -\frac{4a}{3\pi} m \omega^2 \vec{u}_{2c}$$

$$= -\frac{1}{3} \lambda \omega a^3 \vec{u}_y - mg \vec{u}_z - \vec{R}$$

$$\Rightarrow \vec{R} = \frac{4a}{3\pi} m \omega^2 \left(\vec{u}_{2c} - \frac{\pi}{4} \frac{\lambda a^2}{m \omega} \vec{u}_y \right) - mg \vec{u}_z$$

Soit en rotation rapide / $\omega \gg \lambda a^2$

$$\boxed{\vec{R} = \frac{4a}{3\pi} m \omega^2 \vec{u}_{2c} - mg \vec{u}_z}$$

Théorème du moment dynamique :

$$\frac{d}{dt} \sigma(\vec{o}) = \vec{\Gamma} + \vec{M}'(o) + OG \wedge m\vec{g} - \vec{M}(o)$$

$$\text{or } \frac{d}{dt} \sigma(\vec{o}) = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2\pi} m a^2 \omega \left(-\vec{u}_{2c} + \frac{\pi}{2} \vec{u}_z \right) \right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi} m a^2 \omega^2 \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\pi} m a^2 \omega^2 \vec{u}_y = \vec{\Gamma} \vec{u}_z + \frac{1}{8} \lambda a^4 \omega \left(\vec{u}_{2c} - \frac{\pi}{2} \vec{u}_z \right)$$

$$+ \frac{4a}{3\pi} mg \vec{u}_y - \vec{M}(o)$$

$$\Rightarrow \vec{M}(o) = \frac{1}{2\pi} m a^2 \omega^2 \left(\vec{u}_y + \frac{\pi}{4} \frac{\lambda a^2}{m \omega} \vec{u}_{2c} \right) + \frac{4a}{3\pi} mg \vec{u}_y$$

$$\text{car } \vec{\Gamma} = \frac{\pi}{16} \lambda a^4 \omega \vec{u}_z$$

Soit en rotation rapide :

$$\boxed{\vec{M}(o) = \frac{1}{\pi} m a \left(\frac{1}{2} a \omega^2 + \frac{4}{3} g \right) \vec{u}_y}$$

$$\boxed{8} \quad \vec{V}_{AIR} = -l\omega \vec{u}_y \Rightarrow \vec{P}_{AIR} = -Ml\omega \vec{u}_y$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{P}_{AIR}}{dt} = Ml\omega^2 \vec{u}_{2c}$$

Théorème de la résultante dynamique appliqué à la bille de masse M située en A :

$$Ml\omega^2 \vec{u}_{2c} = -Mg\vec{u}_3 - \vec{R}'' \Rightarrow \vec{R}'' = -Ml\omega^2 \vec{u}_{2c} - Mg\vec{u}_3$$

$$\Rightarrow \vec{R} + \vec{R}'' = -\left(Ml - \frac{4a}{3\pi} m\right) \omega^2 \vec{u}_{2c} - (m+M)g\vec{u}_3$$

La résultante totale ne dépend pas de ω si:

$$\boxed{Ml = \frac{4a}{3\pi} m} \quad \text{Equilibrage statique}$$

$$\boxed{9} \quad \vec{\sigma}_S(0) = \vec{OA} \wedge M \vec{V}_{AIR} = M(-l\vec{u}_{2c} + h\vec{u}_3) \wedge -l\omega \vec{u}_y$$

$$= Ml\omega(h\vec{u}_{2c} + l\vec{u}_3)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_S(0)}{dt} = Mlh\omega^2 \vec{u}_y \quad \text{en régime stationnaire}$$

Théorème du moment dynamique appliqué à la sphère:

$$\frac{d\vec{\sigma}_S(0)}{dt} = \vec{OA} \wedge M\vec{g} - \vec{M}''(0) = -Mgl\vec{u}_y - \vec{M}''(0)$$

$$\Rightarrow \vec{M}''(0) = -Ml(g + h\omega^2)\vec{u}_y$$

$$\Rightarrow (\vec{M} + \vec{M}'')(0) = -\left[\left(Mlh - \frac{1}{2\pi} ma^2\right)\omega^2 + \left(Ml - \frac{4a}{3\pi} m\right)g\right]\vec{u}_y$$

Le moment total ne dépend pas de ω si:

$$\boxed{Mlh = \frac{1}{2\pi} ma^2} \quad \text{Equilibrage dynamique}$$

Examen de Mécanique du solide indéformable

Problème: Équilibre d'un disque inhomogène sur un plan

On considère un disque mince de rayon R , de masse surfacique σ_1 et de centre C_1 . Ce disque est évidé par un trou circulaire de rayon $R/2$ et de centre C_2 tel que $C_1C_2 = R/2$ (cf. figure ci-contre).

Notations :

S_0 : solide non évidé

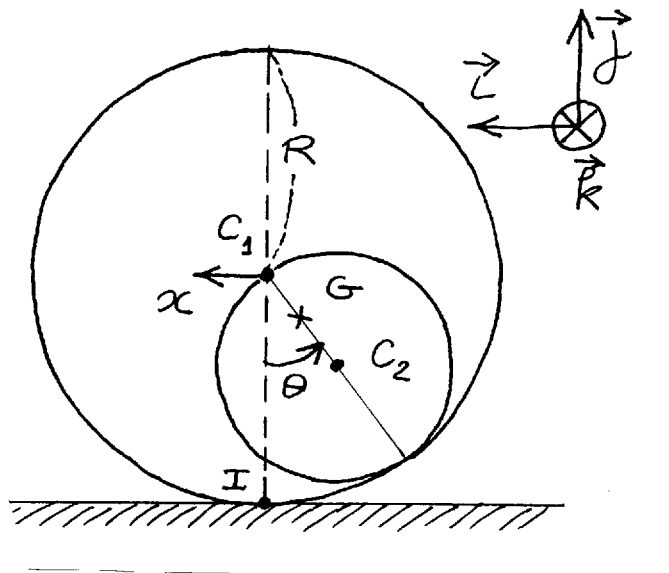
S_1' : partie évidée du solide S_0

S_1 : solide S_0 évidé ($S_0 = S_1 + S_1'$)

S_2 : nouveau matériau dans la partie évidée

S : solide inhomogène composite ($S = S_1 + S_2$)

La partie évidée S_1' sera remplie d'un matériau formant le solide S_2 de masse surfacique $\sigma_2 = 5 \sigma_1$.



- 1 Calculer la position du centre d'inertie C_1' du solide évidé S_1 .
- 2 Calculer la masse totale M du solide $S = S_1 + S_2$, et montrer que $M = 2 \pi \sigma_1 R^2$.
- 3 Calculer la nouvelle position G du centre d'inertie pour le solide inhomogène $S = S_1 + S_2$. Montrer que $C_1G = R/4$.
- 4 Calculer le moment d'inertie du solide S_0 non évidé, par rapport à C_1z , où z est l'axe perpendiculaire au disque S . En utilisant le théorème d'Huyghens, calculer alors le moment d'inertie du solide S_0 non évidé par rapport à G déterminé à la question 3.

[5] Calculer le moment d'inertie de la partie évidée S_1' , par rapport à C_2 . En déduire le moment d'inertie de la partie évidée S_1' par rapport à G . En déduire finalement le moment d'inertie du solide évidé S_1 par rapport à G .

[6] Calculer enfin le moment d'inertie du solide S_2 par rapport à G . En déduire le moment d'inertie J_G par rapport à G du disque inhomogène $S = S_1 + S_2$, et montrer que :
 $J_G = (3 / 8) M R^2$, où M est la masse totale du disque S déterminée à la question [2].

[7] Le disque S est placé sur un plan horizontal. On suppose qu'il peut rouler sans glissement sur ce plan. En utilisant le théorème du moment cinétique, judicieusement appliqué, montrer que $\theta = 0$ est une position d'équilibre. Quelle est la nature de cet équilibre?

[8] Calculer \vec{V}_1 et exprimer la condition de roulement sans glissement se traduisant par une relation entre \dot{x} et $\dot{\theta}$ (cf. figure). Calculer la vitesse de G , \vec{V}_G .

[9] Evaluer l'énergie cinétique totale E_C , ainsi que l'énergie potentielle E_p . Ecrire alors l'équation de Lagrange pour la coordonnée θ et aboutir à l'équation du mouvement :

$$(23 - 8 \cos \theta) \ddot{\theta} + 4 \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{4g}{R} \sin \theta = 0 .$$

[10] Linéariser cette équation, en supposant que $\theta \ll 1$, et aboutir à la pulsation de résonance ω_0 . Application numérique: Calculer $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ pour $R = 0,2$ m ; $g = 9,81$ m / s².

[11] Le disque inhomogène est dorénavant installé sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Montrer à l'aide du théorème du moment cinétique (cf. question [7]) que la nouvelle position d'équilibre en θ , θ_e est solution de l'équation : $\sin(\theta_e + \alpha) = 4 \sin \alpha$.

[12] Retrouver ce résultat à l'aide d'une construction géométrique simple, et justifier votre réponse. En déduire l'angle limite α_0 tel que l'équilibre puisse encore être observé.

Barème envisagé : Questions [1] à [4] : 1 point par question

Questions [5] et [6] : 1,5 points par question

Questions [7] à [10] : 2 points par question

Questions [11] et [12] : 2,5 points par question

Nota Bene : La plupart des 12 questions sont indépendantes.

Problème: Equilibre d'un disque inhomogène sur un plan

1- Pour une origine arbitraire O , on a :

$$\pi \sigma_1 R^2 \vec{OC}_1 = \frac{1}{4} \pi \sigma_1 R^2 \vec{OC}_2 + \frac{3}{4} \pi \sigma_1 R^2 \vec{OC}_1'$$

soit pour $O = C_1 \Rightarrow \vec{C}_1 C_1' = -\frac{1}{3} \vec{C}_1 C_2$

$$2- M = \pi \sigma_1 R^2 - \pi \sigma_1 \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \pi \sigma_2 \left(\frac{R}{2}\right)^2$$
$$= \pi \sigma_1 R^2 + \pi (\sigma_2 - \sigma_1) \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

or $\sigma_2 = 5\sigma_1 \Rightarrow M = \pi \sigma_1 R^2 + 4\sigma_1 \pi \left(\frac{R}{2}\right)^2$

$$M = 2\pi \sigma_1 R^2$$

$$3- 2\pi \sigma_1 R^2 \vec{OG} = \frac{3}{4} \pi \sigma_1 R^2 \vec{OC}_1' + \frac{5}{4} \pi \sigma_1 R^2 \vec{OC}_2$$

soit pour $O = C_1$

$$\Rightarrow 2\vec{C}_1 G = \frac{3}{4} \vec{C}_1 C_1' + \frac{5}{4} \vec{C}_1 C_2 = -\frac{1}{4} \vec{C}_1 C_2 + \frac{5}{4} \vec{C}_1 C_2$$

$$\Rightarrow \vec{C}_1 G = \frac{1}{2} \vec{C}_1 C_2, \text{ soit } \overline{C_1 G} = \frac{R}{4}$$

$$4- J_{S_0/C_1} = \frac{1}{2} m_{S_0} R^2 = \frac{1}{2} (\pi \sigma_1 R^2) R^2 = \frac{1}{2} \pi \sigma_1 R^4$$

$$J_{S_0/G} = J_{S_0/C_1} + m_{S_0} \overline{C_1 G}^2$$

$$= \frac{1}{2} \pi \sigma_1 R^4 + \pi \sigma_1 R^2 \frac{R^2}{16} = \frac{9}{16} \pi \sigma_1 R^4$$

$$5- J_{S_1'/C_2} = \frac{1}{2} m_{S_1'} \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \pi \sigma_1 R^2\right) \left(\frac{R}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{32} \pi \sigma_1 R^4$$

$$J_{S_1'/G} = J_{S_1'/C_2} + m_{S_1'} \overline{C_2 G}^2 = \frac{1}{32} \pi \sigma_1 R^4 + \left(\frac{1}{4} \pi \sigma_1 R^2\right) \frac{R^2}{16}$$

$$= \frac{3}{64} \pi \sigma_1 R^4$$

$$J_{S_1/G} = J_{S_0/G} - J_{S_1'/G} = \frac{9}{16} \pi \sigma_1 R^4 - \frac{3}{64} \pi \sigma_1 R^4$$

$$= \frac{33}{64} \pi \sigma_1 R^4$$

$$6- J_{S_2/G} = \frac{3}{64} \pi \sigma_2 R^4 = \frac{15}{64} \pi \sigma_1 R^4$$

$$J_{S/G} = J_{S_1/G} + J_{S_2/G} = \left(\frac{33}{64} + \frac{15}{64} \right) \pi \rho_1 R^4 = \frac{3}{4} \pi \rho_1 R^4$$

$$\Rightarrow J_{S/G} = J_G = \frac{3}{8} M R^2$$

7- Equilibre $\Rightarrow \sum \vec{M}_{C, \vec{F}_{ext}} = 0$, que l'on écrit en I:

$$\vec{M}_{C, \vec{R}} + \vec{M}_{C, M\vec{g}} = 0 \Rightarrow \vec{IG} \wedge M\vec{g} = 0$$

$$\text{or } \vec{IG} = \vec{IC}_1 + \vec{C}_1\vec{G}$$

$$\Rightarrow R\vec{j} + \left[-\frac{R}{4}(\sin\theta)\vec{i} - \frac{R}{4}(\cos\theta)\vec{j} \right] \wedge (-Mg\vec{j}) = 0$$

$$\Rightarrow R \left[\left(\frac{1}{4} \sin\theta \right) \vec{i} + \left(\frac{1}{4} (\cos\theta) - 1 \right) \vec{j} \right] \wedge Mg\vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi$$

$\theta = 0$; équilibre stable, car E_p minimum

$\theta = \pi$; équilibre instable, car E_p maximum

$$8- \vec{V}_{C_1} = \dot{x}\vec{i} ; \vec{V}_I = \vec{V}_{C_1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{C}_1\vec{I}$$

$$= \dot{x}\vec{i} + (-\dot{\theta}\vec{k}) \wedge (-R\vec{j})$$

$$= \dot{x}\vec{i} - R\dot{\theta}\vec{i}$$

or roulement sans glissement en I $\Rightarrow \vec{V}_I = 0$

$$\Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta} \quad \text{De même:}$$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_{C_1} + \vec{\Omega} \wedge \vec{C}_1\vec{G} = \dot{x}\vec{i} + (-\dot{\theta}\vec{k}) \wedge \left(-\frac{R}{4}(\sin\theta)\vec{i} - \frac{R}{4}(\cos\theta)\vec{j} \right)$$

$$= \dot{x}\vec{i} + \frac{R}{4}\dot{\theta} \left[(\sin\theta)\vec{j} - (\cos\theta)\vec{i} \right]$$

$$\vec{V}_G = \left(\dot{x} - \frac{R}{4}\dot{\theta}\cos\theta \right) \vec{i} + \left(\frac{R}{4}\dot{\theta}\sin\theta \right) \vec{j} ; \text{ or } \dot{x} = R\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_G = \frac{R\dot{\theta}}{4} (4 - \cos\theta) \vec{i} + \frac{R\dot{\theta}}{4} (\sin\theta) \vec{j}$$

$$9- V_G^2 = \left(\frac{R\dot{\theta}}{4} \right)^2 [16 - 8\cos\theta + 1] = \left(\frac{R\dot{\theta}}{4} \right)^2 (17 - 8\cos\theta)$$

$$E_c = \frac{1}{2} J_G \Omega^2 + \frac{1}{2} M V_G^2, \text{ avec } J_G = \frac{3}{8} M R^2$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{8} M R^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{R^2 \dot{\theta}^2}{16} \right) (17 - 8\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{M R^2}{16} \right) (23 - 8\cos\theta) \dot{\theta}^2$$

Par ailleurs, on obtient aisément :

$$E_p = E_{p0} + M \frac{R}{4} g (1 - \cos \theta)$$

D'où l'équation de Lagrange en θ :

$$\frac{MR^2}{16} (23 - 8 \cos \theta) \ddot{\theta} + \frac{MR^2}{4} \dot{\theta}^2 \sin \theta + M \frac{R}{4} g \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \left[(23 - 8 \cos \theta) \ddot{\theta} + 4 \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{4g}{R} \sin \theta = 0 \right]$$

10- Linéarisation : $\sin \theta \approx \theta$ et $\cos \theta \approx 1$

$$\Rightarrow 15 \ddot{\theta} + \frac{4g}{R} \theta = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{4g}{15R}} = 2\pi f_0$$

A.N : $R = 0,2 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4g}{15R}} = \underline{\underline{0,57 \text{ Hz}}}$$

Note : Cette valeur est indépendante de la masse M totale du disque. (résultat analogue à celui du pendule simple) -

11- On applique le théorème du moment cinétique au point I . Soit à l'équilibre (cf. question 7- et voir figure ci-contre) :

$$\vec{IG} \wedge M\vec{g} = 0$$

$$\text{or } \vec{IG} = -\frac{R}{4} \left[(\sin \theta) \vec{c} + ((\cos \theta) - 4) \vec{j} \right] \quad (\text{cf. question n}^\circ 7-)$$

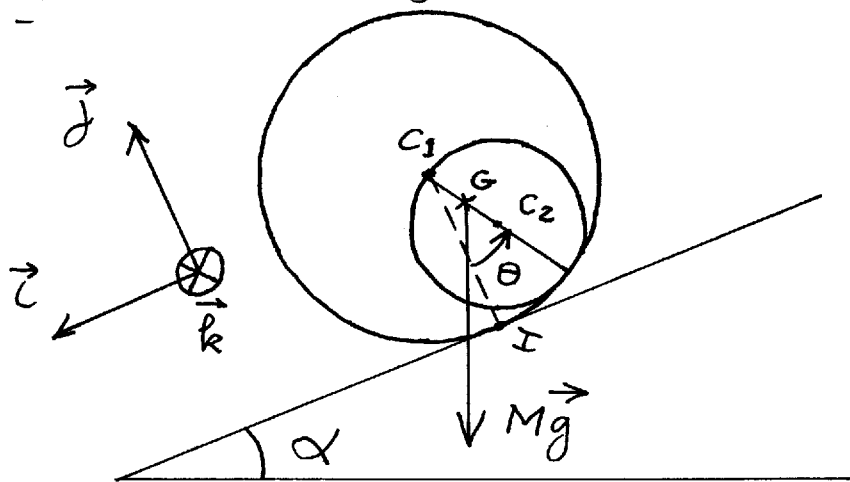
$$\text{et } M\vec{g} = -Mg \left(-(\sin \alpha) \vec{c} + (\cos \alpha) \vec{j} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{IG} \wedge M\vec{g} = \frac{RMg}{4} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ (\cos \theta) - 4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{RMg}{4} \left(\sin \theta \cos \alpha + (\sin \alpha) ((\cos \theta) - 4) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \alpha = -\sin \alpha (\cos \theta - 4)$$

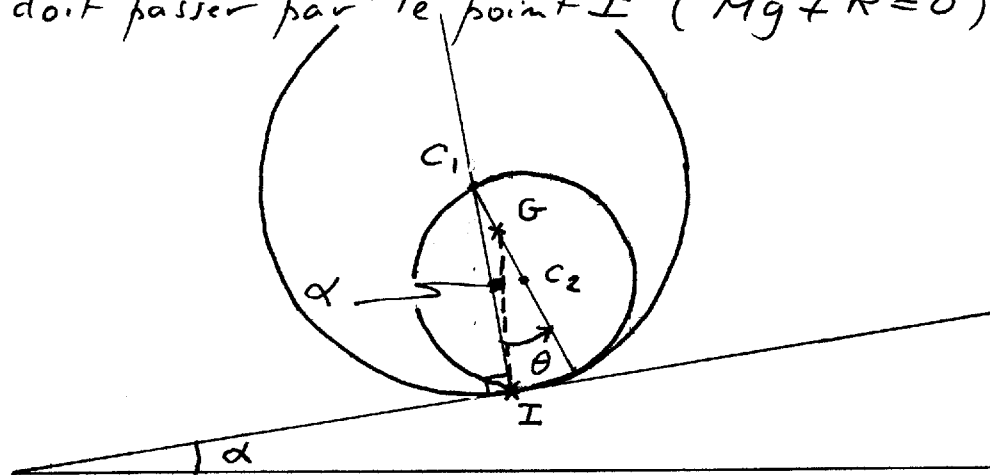
$$\text{or } \sin(\theta + \alpha) = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha$$



$$\Rightarrow \sin(\theta + \alpha) - \cos\theta \sin\alpha = -\sin\alpha \cos\theta + 4\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\theta + \alpha) = 4\sin\alpha}$$

12- La figure tracée à la question 11 est incorrecte, car \vec{Mg} doit passer par le point I ($\vec{Mg} + \vec{R} = 0$)



Les relations trigonométriques dans le triangle quelconque C_1GI aboutissent à :

$$\frac{\sin(\pi - \theta - \alpha)}{R} = \frac{\sin\alpha}{R/4} \Rightarrow \sin(\theta + \alpha) = 4\sin\alpha$$

L'angle limite α_0 se calcule de telle manière que le triangle C_1GI devienne rectangle en G

$$\text{D'où } \sin\alpha_0 = 1/4 \Rightarrow \alpha_0 = 14,28^\circ$$

On peut retrouver ce résultat à partir de l'équation

$$\sin\theta \cos\alpha = \sin\alpha (4 - \cos\theta) \text{ qui est élevée au carré:}$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta \cos^2\alpha = \sin^2\alpha (16 - 8\cos\theta + \cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha (1 - \cos^2\theta) = \sin^2\alpha (16 - 8\cos\theta + \cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta - 8\sin^2\alpha \cos\theta + 17\sin^2\alpha - 1 = 0$$

$$\Delta' = 16\sin^4\alpha - 17\sin^2\alpha + 1$$

$$= (16\sin^2\alpha - 1)(\sin^2\alpha - 1)$$

Solutions réelles si $\Delta' > 0 \Rightarrow 16\sin^2\alpha - 1 < 0$

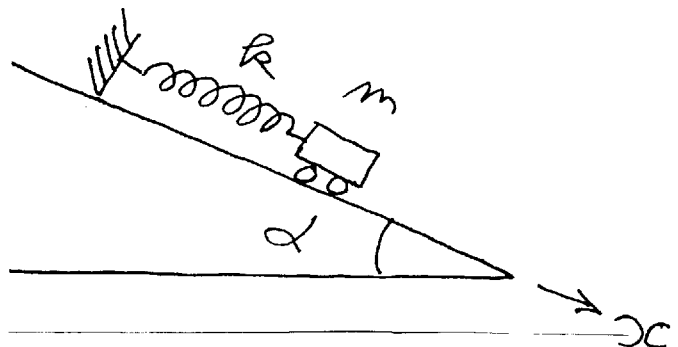
$$\Rightarrow 4\sin\alpha \leq 1 \Rightarrow \sin\alpha \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{D'où } \alpha_0 = \arcsin \frac{1}{4} = 14,28^\circ$$

Examen de Mécanique du solide indéformable

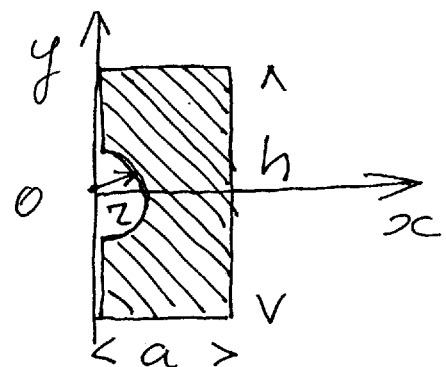
Exercice 1: Mouvement d'un chariot sur un plan incliné

On considère le mouvement d'un chariot sur un plan incliné d'angle α , accroché à un ressort de traction - compression de constante de rigidité k . Le chariot a une masse m (voir figure ci-contre). Dessiner l'ensemble des efforts en présence. Écrire l'équation du mouvement. Montrer que le chariot va décrire un mouvement sinusoidal lorsqu'il est écarté de sa position d'équilibre. Calculer la pulsation de résonance ω_0 . Cette valeur est-elle fonction de α ? Pourquoi ? Justifier votre réponse.



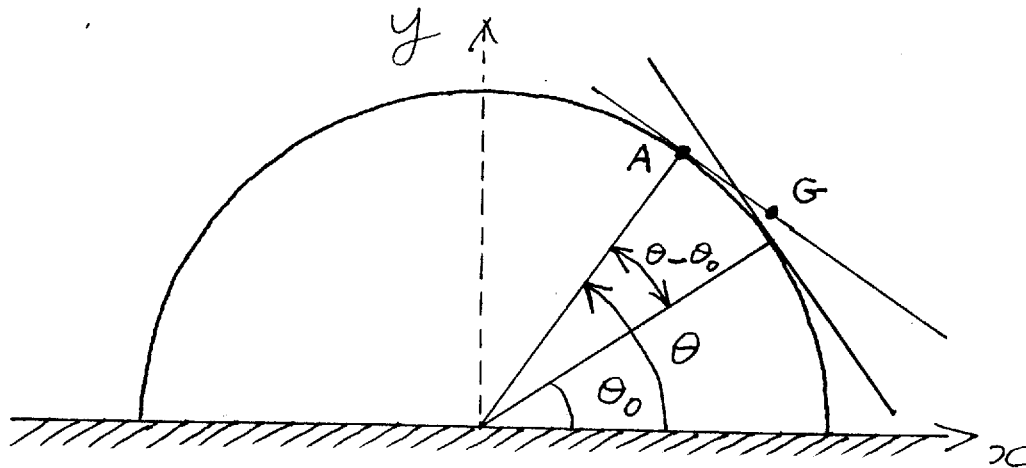
Exercice 2: Centre d'inertie d'une plaque percée au centre d'un côté par un trou hémicirculaire

Calculer la position du centre d'inertie G de la plaque de côtés a et h , percée sur le côté h (au centre de celui-ci) d'un demi cercle de rayon r . Retrouver le cas limite de la plaque entière en prenant $r = 0$. Calculer numériquement la position de G pour $r = a$ et $h = 2a$.



Problème: Mouvement d'une planche sur un demi-cylindre

On considère un demi-cylindre de rayon R posé sur un sol horizontal. Une planche de longueur L et de masse M est placée dessus (cf. figure ci-dessous). On suppose qu'il existe un angle θ_0 pour lequel le centre d'inertie G de la planche est au contact de la surface du demi-cylindre. On suppose en outre que la planche peut osciller dans un mouvement de roulement sans glissement autour de cette position.



- ① Écrire la condition de roulement sans glissement en A. En déduire la vitesse de G lorsque $\theta \neq \theta_0$ (cf. figure). Calculer alors l'énergie cinétique T de la planche et montrer que :

$$T = \frac{1}{2} M R^2 (\theta - \theta_0)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 ,$$

où I est le moment d'inertie de la planche.

- ② Calculer l'énergie potentielle V_0 du système pour $\theta = \theta_0$. Évaluer alors l'énergie potentielle V pour $\theta \neq \theta_0$ (voir figure) à partir de V_0 , et montrer que :

$$V = M g R [\sin \theta - (\theta - \theta_0) \cos \theta] .$$

- ③ On cherche à étudier la stabilité de l'équilibre. Sachant qu'une position d'équilibre correspond toujours à une extremum de l'énergie potentielle V, montrer que $\theta = \theta_0$ est une position d'équilibre. S'agit-il d'une position d'équilibre stable ? Justifier votre réponse.

- ④ Écrire l'équation de Lagrange en θ . Effectuer le changement de variable $\Theta = \theta - \theta_0$. Développer le terme en $\sin \theta$ autour de $\theta_0 + \Theta$ en notant que $\Theta \ll \theta_0$. Aboutir alors à l'équation du mouvement sous la forme :

$$I \ddot{\Theta} + M R^2 \Theta^2 \ddot{\Theta} + M R^2 \Theta \dot{\Theta}^2 + M g R \Theta \sin \theta_0 + M g R \Theta^2 \cos \theta_0 = 0 .$$

- ⑤ Linéariser cette équation autour de Θ . Calculer alors la pulsation de résonance ω_0 .

- ⑥ Retrouver le résultat de l'équation ④ à partir du théorème de conservation de l'énergie mécanique.

- ⑦ Calculer le moment d'inertie I de la planche. Exprimer alors ω_0 , et calculer la période τ des oscillations. Application numérique : $L = 0,5 \text{ m}$; $R = 0,25 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$;
Calculer τ pour $\theta_0 = 0^\circ$; $\theta_0 = 45^\circ$; $\theta_0 = 90^\circ$. Est-ce que le résultat pour $\theta_0 = 0^\circ$ vous semble réaliste ? Justifier votre réponse.

Problème :

1) Condition de roulement sans glissement s'écrit :

$$V(A) = 0 \quad \text{or} \quad V(G) = V(A) + \vec{\omega} \wedge A\vec{G}$$

$$\Rightarrow \|V(G)\| = (\theta - \theta_0) R \dot{\theta}$$

$$T_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M V(G)^2 = \frac{1}{2} M R^2 (\theta - \theta_0)^2 \dot{\theta}^2; \quad T_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

$$2) \theta = \theta_0 \Rightarrow V = M g R \sin \theta_0$$

$$\theta \neq \theta_0 \Rightarrow V = M g R \sin \theta - M g R (\theta - \theta_0) \cos \theta$$

$$\Rightarrow V = M g R [\sin \theta - (\theta - \theta_0) \cos \theta]$$

$$\text{or } \|A\vec{G}\| = R(\theta - \theta_0) \Rightarrow y_G = R \sin \theta - R(\theta - \theta_0) \cos \theta$$

CQFD (cf figure).

$$\text{D'où : } \begin{cases} T = \frac{1}{2} M R^2 (\theta - \theta_0)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \\ V = M g R [\sin \theta - (\theta - \theta_0) \cos \theta] \end{cases}$$

3) extremum de V pour $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$

$$\text{or } \frac{\partial V}{\partial \theta} = M g R [\cos \theta + (\theta - \theta_0) \sin \theta - \cos \theta]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \quad \text{CQFD}$$

D'où $\theta = \theta_0$ est une position d'équilibre stable car cet extremum est un maximum ($\forall \theta, V(\theta) > V(\theta_0)$ puisque $(\theta - \theta_0) \cos \theta > 0$).

4) Equation de Lagrange : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$

$$\Rightarrow I \ddot{\theta} + \frac{d}{dt} (M R^2 (\theta - \theta_0)^2 \dot{\theta}) - M R^2 (\theta - \theta_0) \dot{\theta}^2 + M g R (\theta - \theta_0) \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow I \ddot{\theta} + M R^2 (\theta - \theta_0)^2 \ddot{\theta} + 2 M R^2 (\theta - \theta_0) \dot{\theta}^2 - M R^2 (\theta - \theta_0) \dot{\theta}^2 + M g R (\theta - \theta_0) \sin \theta = 0$$

Changement de variable $\theta - \theta_0 = \mathcal{H} \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\mathcal{H}}$ et $\ddot{\theta} = \ddot{\mathcal{H}}$

$$\Rightarrow I \ddot{\mathcal{H}} + M R^2 \mathcal{H}^2 \ddot{\mathcal{H}} + M R^2 \mathcal{H} \dot{\mathcal{H}}^2 + M g R \mathcal{H} \sin(\theta_0 + \mathcal{H}) = 0$$

or $\sin(\theta_0 + \mathcal{H}) = \sin \theta_0 \cos \mathcal{H} + \cos \theta_0 \sin \mathcal{H}$ avec $\mathcal{H} \ll 1$

$$\Rightarrow \sin(\theta_0 + \mathcal{H}) \approx \sin \theta_0 + \mathcal{H} \cos \theta_0$$

... / ...

$$\Rightarrow I \ddot{\theta} + MR^2 \dot{\theta}^2 \ddot{\theta} + MR^2 \theta \dot{\theta}^2 + MgR \theta \sin \theta_0 + MgR \theta^2 \cos \theta_0 = 0$$

5) Linéarisation \Rightarrow on néglige les ∞ et petits d'ordre 2 et 3:

$$\Rightarrow I \ddot{\theta} + (MgR \sin \theta_0) \theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{MgR \sin \theta_0}{I}}$$

$$6) \frac{d}{dt}(T+V) = 0 \Rightarrow MgR \dot{\theta}(\theta - \theta_0) \sin \theta + MR^2(\theta - \theta_0)^2 \ddot{\theta} + MR^2(\theta - \theta_0) \dot{\theta}^3 + I \ddot{\theta} = 0$$

$$\Rightarrow I \ddot{\theta} + MR^2 \dot{\theta}^2 \ddot{\theta} + MR^2 \theta \dot{\theta}^2 + MgR \theta \sin \theta_0 + MgR \theta^2 \cos \theta_0 = 0 \quad \text{CQFD}$$

$$7) I = \int r^2 dm \quad \text{avec} \quad \left. \begin{array}{l} dm = \rho dr \\ M = \rho L \end{array} \right\} \Rightarrow dm = M \frac{dr}{L}$$

$$\Rightarrow I = \frac{M}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} r^2 dr = \frac{M}{L} \frac{1}{3} \left[r^3 \right]_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} = \frac{M}{3L} \left[\frac{L^3}{4} \right] = \frac{ML^2}{12}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{12gR \sin \theta_0}{L^2}} \Rightarrow T = \frac{L\pi}{\sqrt{3gR \sin \theta_0}}$$

A.N.: $L = 0,5 \text{ m}$; $R = 0,25 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
 $\theta_0 = 0^\circ$; $\theta_0 = 45^\circ$; $\theta_0 = 90^\circ$

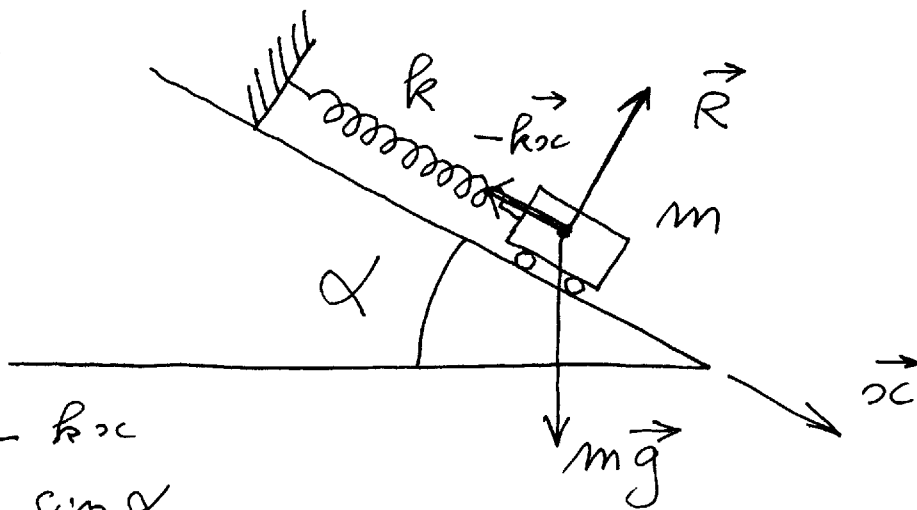
$\theta_0 = 0^\circ \Rightarrow T \rightarrow \infty$ ce résultat n'est pas réaliste (de toutes façons la planche va tomber!)

$$\theta_0 = 90^\circ \Rightarrow T = 4,265$$

$$\theta_0 = 45^\circ \Rightarrow T = 5,075$$

Exercice 1:

* A l'équilibre,
cf. figure ci-dessous:



$$0 = mg \sin \alpha - kx$$

$$\Rightarrow kx = mg \sin \alpha$$

* Lorsque le chariot est écarté de cette position d'équilibre, le PFD s'écrit:

$$M \ddot{x} = mg \sin \alpha - kx$$

$$\Rightarrow m \ddot{x} + kx = mg \sin \alpha$$

$$\text{D'où } x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + X_0,$$

où A et φ dépendent des conditions initiales, avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ et où $X_0 = (mg \sin \alpha)/k$

En conclusion, la pulsation ω_0 est indépendante de l'angle α du plan incliné, qui lui ne joue que sur la déflexion statique X_0

Exercice 2:

On commence par calculer la position C du centre d'inertie du $1/2$ cercle -

$$x_c = \frac{\int x c ds}{S} = \frac{2}{\pi r^2} \int x ds$$

$$\text{or } ds = (2r \cos \theta) d\theta$$

$$\text{et } x = r \sin \theta \Rightarrow dx = (r \cos \theta) d\theta$$

$$\Rightarrow ds = 2r^2 \cos^2 \theta d\theta$$

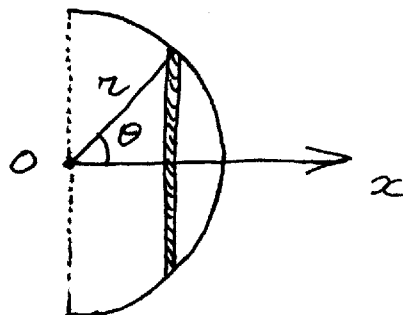
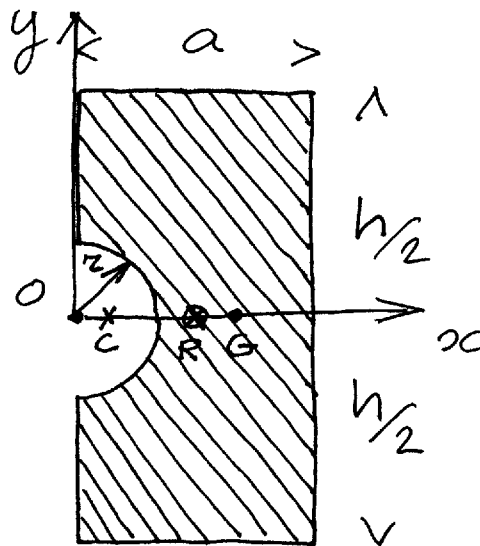
$$\Rightarrow \int x c ds = 2r^3 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$= 2r^3 \int_0^1 (-\cos^2 \theta) d(\cos \theta)$$

$$= 2r^3 \int_0^1 (-u^2) du$$

$$= 2r^3 \left[-\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2r^3}{3}$$

$$x_c = \frac{4r^3}{3\pi r^2} = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} = 0,424 r$$



Par raison de symétrie $y_G = 0$. De même $y_G = 0$.

Ensuite, on fabrique le solide par superposition de 2 états à savoir:

- 1) La plaque de côtés $a \times h$ de masse surfacique $(+\sigma)$
- 2) Le $\frac{1}{2}$ disque de rayon r et de masse surfacique $(-\sigma)$

$$x_G = \frac{m_C x_{CC} + m_R x_{CR}}{m_C + m_R}$$

avec : $x_{CC} = \frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$; $x_{CR} = \frac{a}{2}$

$m_C = (-\sigma) \frac{\pi r^2}{2}$; $m_R = (+\sigma) ah$

$$\Rightarrow x_G = \frac{(a^2 h / 2) - (2r^3 / 3)}{ah - (\pi r^2 / 2)}$$

Cas particuliers :

1) $r = 0 \Rightarrow x_G = a/2$ CQFD

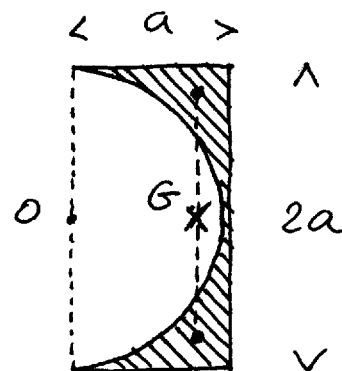
2) $r = a$; $h = 2a$

$$\Rightarrow x_G = \frac{a^3 - 2a^3/3}{2a^2 - \pi \frac{a^2}{2}}$$

$$x_G = \frac{\frac{1}{3} a}{(2 - \frac{\pi}{2})} = \underline{\underline{0,777 a}}$$

Vérifier sur la figure, puisque

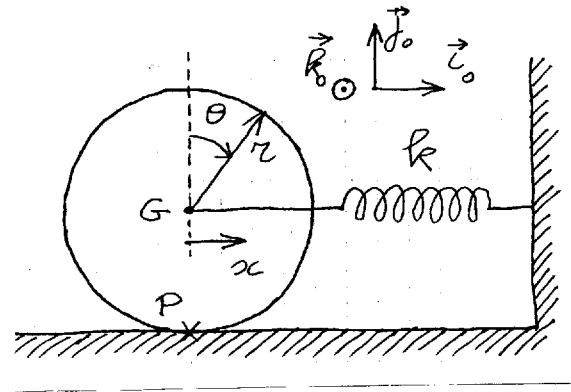
$$OG \approx 3/4 = 0,75$$



Examen de Mécanique du solide indéformable

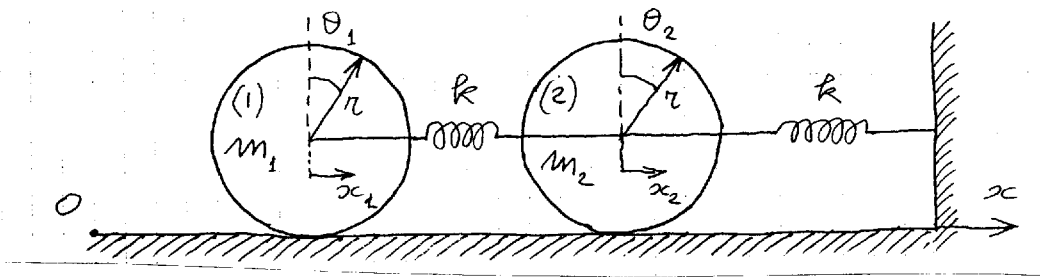
Problème: Mouvement de roulement de cylindres attachés par des ressorts

I - Dans un premier temps, on considère le système ci-contre constitué d'un cylindre de rayon r , de masse m , de moment d'inertie $J = \frac{1}{2} mr^2$. Ce cylindre est attaché par son axe à un ressort de raideur k et de masse négligeable fixé à l'autre extrémité à un bâti rigide. On suppose de plus que le cylindre peut rouler sans glisser sur le plan horizontal (pour $x = 0$, le système est à l'équilibre, c.a.d. le ressort est au repos).



- ① Évaluer la vitesse au point G, centre d'inertie. En déduire celle du point P. Écrire alors la condition de roulement sans glissement au point P. En déduire une relation entre x et θ .
- ② Soit $\vec{R} = N\vec{j}_0 + T\vec{i}_0$, la réaction du support horizontal sur le cylindre au point P. Écrire le théorème de la résultante dynamique. Projeter cette équation sur les vecteurs directeurs \vec{i}_0 et \vec{j}_0 . En déduire une relation entre N et mg . Écrire le théorème du moment cinétique en G. Éliminer T , et établir l'équation du mouvement. En déduire la pulsation propre du système.
- ③ Évaluer l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p du système. En supposant que les pertes peuvent être négligées, appliquer le théorème de conservation de l'énergie mécanique pour établir l'équation du mouvement de la question ②.
- ④ Refaire le même calcul à l'aide de l'équation de Lagrange. Pourquoi les deux écritures (questions ③ et ④) sont tout à fait similaires ? Est-ce toujours le cas ? Donner un exemple pour justifier votre propos (par exemple cf II -).

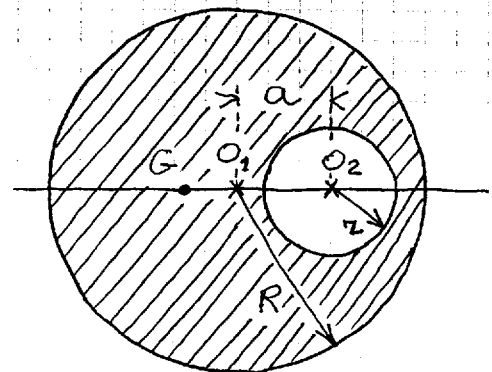
II - On ajoute maintenant un deuxième cylindre de masse m_2 . Il est attaché au premier (de masse m_1) par l'intermédiaire d'une raideur k de masse négligeable (cf. figure ci-dessous).



- ⑤ Évaluer l'énergie cinétique de l'ensemble, en supposant qu'il y a roulement sans glissement pour les deux cylindres. Calculer l'énergie potentielle et établir les deux équations du mouvement à l'aide du formalisme de Lagrange.
- ⑥ Étudier les deux cas limites où $m_1 \gg m_2$ et $m_2 \gg m_1$, et justifier les résultats obtenus à partir de considérations physiques.
- ⑦ Le plan de roulement Ox est dorénavant incliné, faisant avec l'horizontale un angle α . Établir les nouvelles équations du mouvement par la méthode de Lagrange. Que se passe-t-il pour $\alpha = \pi / 2$?
- ⑧ Calculer les pulsations propres pour $m_1 = m_2 = m$, lorsque $\alpha = 0$. [traiter cette partie en posant $x_1 = X_1 \cos \omega t$; $x_2 = X_2 \cos \omega t$, où ω est la pulsation].

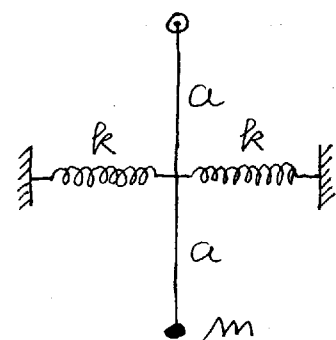
Exercice 1: Centre d'inertie d'un disque percé

On considère un disque mince de rayon R et de masse volumique uniforme ρ . Ce disque est percé au point O_2 distant du centre du disque O_1 de la distance a , d'un trou circulaire de rayon r (cf. figure ci-contre). Calculer la position G du centre d'inertie de l'ensemble. [on aura intérêt à considérer la superposition de deux états discrets, dont l'un fait intervenir le disque de rayon r avec la densité $-\rho$]. Application numérique pour $r = R / 3$.



Exercice 2: Étude d'un pendule simple accroché à des ressorts

On considère le système ci-contre constitué d'un pendule simple de longueur $2a$, et de masse m . Des raideurs de constante k sont montées à la moitié de la longueur du pendule. Déterminer l'équation du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique, dans l'hypothèse des petits mouvements ($\theta \ll 1$). Retrouver ce résultat à partir du théorème de conservation de l'énergie mécanique. Évaluer la pulsation de résonance du système.



Exercice 1:

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OO}_1 \times m_1 + \vec{OO}_2 \times m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \vec{O_1G} = \frac{\vec{O_1O_2} \times m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow x_G = \vec{O_1O_2} \times \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)$$

$$m_1 = \rho \times \pi R^2; \quad m_2 = (-\rho) \times \pi r^2$$

$$\Rightarrow x_G = a \times \frac{-\rho \times \pi r^2}{\rho \times \pi R^2 - \rho \times \pi r^2} \Rightarrow \boxed{x_G = -a \left(\frac{r^2}{R^2 - r^2} \right)}$$

A.N: $r = R/3 \Rightarrow x_G = -a/8$

Exercice 2:

$$m(2a)^2 \ddot{\theta} = -2ka^2 \theta - mg \times 2a \theta$$

$$\Rightarrow 2am \ddot{\theta} + (ka + mg) \theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{2m} + \frac{g}{2a}$$

$$E_c = \frac{1}{2} (m \times 4a^2) \dot{\theta}^2; \quad E_p = mg \times 2a(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2} \times 2k(a\theta)^2$$

$$\frac{dE_M}{dt} = 0 \Rightarrow 4a^2 m \ddot{\theta} \dot{\theta} + 2ka^2 \theta \dot{\theta} + mg \times 2a \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow 2am \ddot{\theta} + (ka + mg) \theta = 0 \quad \text{CQFD}$$

Problème: 1) $\vec{V}(G) = \dot{x} \vec{e}_0$; $\vec{V}(P) = \vec{V}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GP}$
 $= \dot{x} \vec{e}_0 + (-\dot{\theta} \vec{e}_0) \wedge (-r \vec{e}_0)$

$$\Rightarrow \vec{V}(P) = (\dot{x} - r\dot{\theta}) \vec{e}_0$$

Absence de glissement si $\vec{V}(P) = 0 \Rightarrow x = r\theta$

2) Th. résultante: $m \vec{y} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{F}$

$$\Rightarrow \begin{cases} N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \\ m \ddot{x} = -F + T = -kx + T \end{cases}$$

Th. moment $\frac{d\vec{J}_G}{dt} = \sum \vec{M}_G \vec{F}_{ext}$

$$\vec{J}_G = J \vec{\Omega} = -\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{J}_G}{dt} = -\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} \vec{e}_0$$

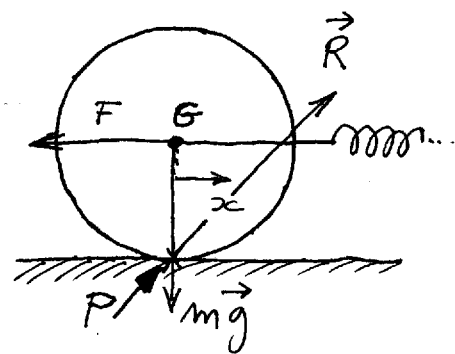
$$\sum \vec{M}_G \vec{F}_{ext} = \vec{M}_G \vec{R} = \vec{GP} \wedge \vec{R} = r T \vec{e}_0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} = r T = -\frac{1}{2} m \ddot{x} r$$

or $m \ddot{x} = -kx + T \Rightarrow m \ddot{x} = -kx - \frac{1}{2} m \ddot{x}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$



$$3) E_c = \frac{1}{2} m v(G)^2 + \frac{1}{2} J \Omega^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m r^2 \right) \left(\dot{x}/r \right)^2$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 ; E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{d}{dt} E_M = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2} m \ddot{x} + k x \right) \dot{x} = 0 \text{ or } \dot{x} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} + k x = 0 \quad \text{CQFD}$$

4) Equation de Lagrange : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} m \ddot{x} + k x = 0 \quad \text{CQFD.}$$

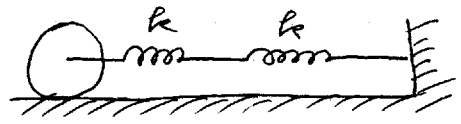
L'équation de Lagrange fournit toujours le "bon" résultat.
 Le théorème de conservation de l'énergie mécanique ne s'applique qu'aux systèmes à un degré de liberté (cf contre exemple précédent II)

II-5) $E_{c1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m_1 r^2 \right) \left(\dot{x}_1/r \right)^2 = \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2$
 $E_{c2} = \frac{3}{4} m_2 \dot{x}_2^2$
 $E_p = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 = \frac{1}{2} k x_1^2 + 2 \frac{1}{2} k x_2^2 - k x_1 x_2$

$$d x_1: \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0$$

$$d x_2: \frac{3}{2} m_2 \ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) + k x_2 = 0$$

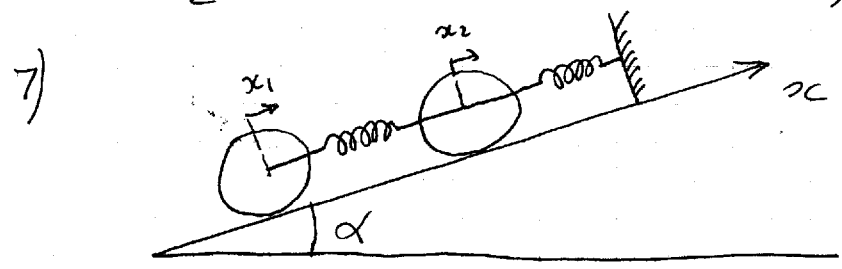
6) $m_1 \gg m_2 \Rightarrow 2 k x_2 = k x_1$
 $\Rightarrow \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1 + \frac{k x_1}{2} = 0$



2 ressorts en série k et k
 $\Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} \Rightarrow VT = \frac{k}{2} \quad \text{CQFD}$

$m_2 \gg m_1 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\Rightarrow \frac{3}{2} m_2 \ddot{x}_2 + k x_2 = 0$, on retrouve l'équation du mt d'un cylindre seul (cf I) CQFD



$$\begin{cases} E_c = \frac{3}{4} (m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2) \\ E_p = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + m_1 g x_1 \sin \alpha + m_2 g x_2 \sin \alpha + E_p^0 \end{cases}$$

$$d x_1: \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) + m_1 g \sin \alpha = 0$$

$$d x_2: \frac{3}{2} m_2 \ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1) + m_2 g \sin \alpha = 0$$

Equations du mt sont inchangées pour ce qui est de la réponse dynamique -

$$8) m_1 = m_2 = m; \quad \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m \ddot{x}_1 + 2k(x_1 - x_2) = 0 \\ 3m \ddot{x}_2 + 2k(2x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = X_1 \cos \omega t; \quad x_2 = X_2 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2k - 3m\omega^2 & -2k \\ -2k & 4k - 3m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Soit en posant $k/m = \omega_0^2$

$$\Rightarrow (2\omega_0^2 - 3\omega^2)(4\omega_0^2 - 3\omega^2) - 4\omega_0^4 = 0$$

$$\Rightarrow 9\omega^4 - 18\omega_0^2\omega^2 + 4\omega_0^4 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 \left[1 \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \right] \begin{cases} \nearrow 1,74\omega_0^2 \\ \searrow 0,25\omega_0^2 \end{cases}$$

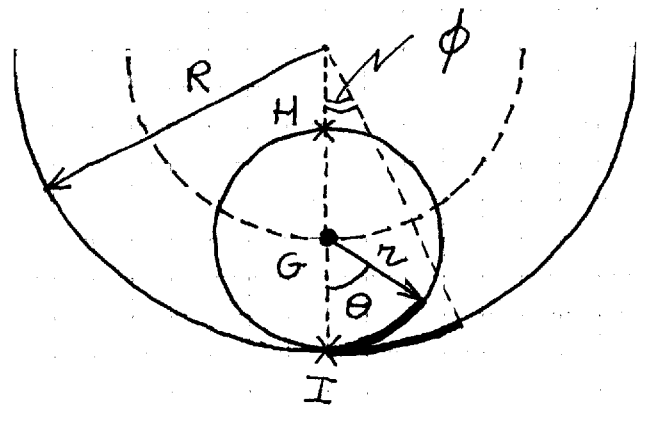
$$\Rightarrow \omega = 1,32 \omega_0 \text{ et } \omega = 0,50 \omega_0$$

Devoir* de Mécanique du solide indéformable

(*Il s'agit d'un devoir blanc pour les anciens DEUST 1, et d'un test de maintien définitif pour les étudiants admis en DEUST 2 par équivalence)

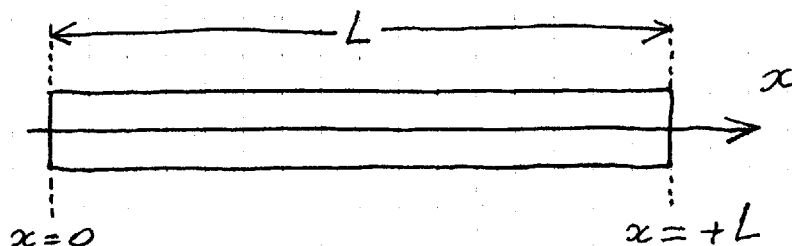
Exercice 1: Roulement d'un cylindre dans une gorge cylindrique

On considère un cylindre de rayon r , pouvant rouler à l'intérieur d'une gorge cylindrique de rayon R (cf. figure ci-contre). Calculer la vitesse du centre d'inertie G en fonction de R , r , et ϕ [on pourra noter que G décrit un cercle de rayon $R-r$]. En déduire la vitesse du point de contact I , ainsi que celle du point H . Écrire alors la **condition de roulement sans glissement** au point I . Exprimer finalement avec cette condition la vitesse en H en fonction de celle en G . Conclusion ?



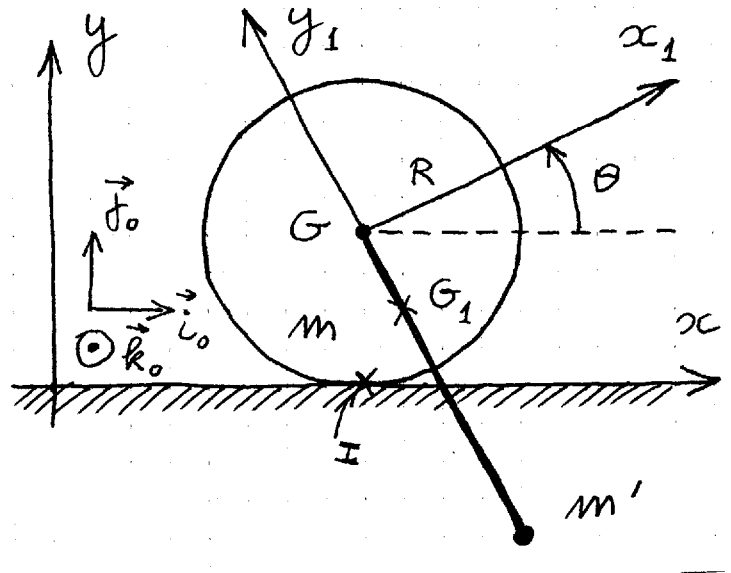
Exercice 2: Centre de gravité d'une barre inhomogène

On considère une barre de longueur L , ayant une masse volumique fonction de la position fournie par l'expression $\rho(x) = \rho_0(x^2 / L^2)$, pour $0 < x < L$. Calculer la position du centre d'inertie de la barre. Calculer son moment d'inertie en supposant que la section de la barre est très faible devant L .



Problème: Oscillations d'un système constitué d'une tige montée sur un disque

On considère le solide (1) représenté ci-contre, constitué d'un disque homogène sur lequel est fixé une tige sans masse portant une masse ponctuelle m' à son extrémité. Soit R le rayon du disque, m sa masse et I_0 son moment d'inertie exprimé en G . La tige est de longueur ℓ . La masse totale du solide (1) est $m_1 = m + m'$. Son centre d'inertie est situé en G_1 tel que $a = GG_1$, et son moment d'inertie en G_1 est I_1 .



- 1) Calculer la vitesse absolue du point G , et celle au point I . Écrire alors la condition de roulement sans glissement en I , et en déduire une relation entre x et θ .
- 2) Calculer la vitesse absolue au point G_1 . Calculer ensuite en G_1 la quantité de mouvement et le moment cinétique, ainsi que la quantité d'accélération et le moment dynamique.
- 3) Écrire le théorème de la résultante dynamique et celui du moment cinétique en G_1 . En déduire les 3 équations projetées sur les vecteurs directeurs $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$.
- 4) Linéariser ces 3 équations et déterminer l'équation du mouvement en θ sous la forme :

$$[I_1 + m_1(a - R)^2] \ddot{\theta} + m_1 g a \theta = 0 .$$
- 5) Retrouver cette équation à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
- 6) Même question à l'aide de l'équation de Lagrange en θ . [Note: on prendra soin dans cette question de linéariser après application de l'équation de Lagrange].
- 7) Déterminer a et I_1 à l'aide des données de l'énoncé.

Note: **La plupart des 7 questions sont indépendantes.**

DEUST VAS 2^{ème} année - Mécanique
Correction du partiel - Décembre 1996

$$1) \left\{ v_{(1)}^0 \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ \dot{x} \vec{l}_0 \end{array} \right\}$$

loi de distribution des vitesses entre I et G :

$$v(\text{I}) = v(\text{G}) + \vec{\omega} \wedge \vec{GI} = \dot{x} \vec{l}_0 + \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge (-R \vec{j}_0) \\ = \dot{x} \vec{l}_0 + R \dot{\theta} \vec{l}_0$$

$$\Rightarrow \left\{ v_{(1)}^0 \right\}_I = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ (\dot{x} + R \dot{\theta}) \vec{l}_0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{condition de roulement} \\ \text{sans glissement :} \\ \dot{x} = -R \dot{\theta} \end{array}$$

$$2) v(\vec{G}_1) = v(\vec{G}) + \vec{\omega} \wedge \vec{GG}_1 = \dot{x} \vec{l}_0 + \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge (-a \vec{j}_1)$$

$$\Rightarrow v(\vec{G}_1) = \dot{x} \vec{l}_0 + a \dot{\theta} \vec{l}_1, \text{ d'où :}$$

$$\left\{ v_{(1)}^0 \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ \dot{x} \vec{l}_0 + a \dot{\theta} \vec{l}_1 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ p_{(1)}^0 \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{l} m_1 (\dot{x} \vec{l}_0 + a \dot{\theta} \vec{l}_1) \\ I_1 \dot{\theta} \vec{k}_0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ Q_{(1)}^0 \right\}_{G_1} = \left\{ \begin{array}{l} m_1 (\ddot{x} \vec{l}_0 + a \ddot{\theta} \vec{l}_1 + a \dot{\theta}^2 \vec{j}_1) \\ I_1 \ddot{\theta} \vec{k}_0 \end{array} \right\}$$

3) Théorème de la résultante :

$$m_1 (\ddot{x} \vec{l}_0 + a \ddot{\theta} \vec{l}_1 + a \dot{\theta}^2 \vec{j}_1) = T \vec{l}_0 + N \vec{j}_0$$

soit en notant que : $\vec{l}_1 = \vec{l}_0 \cos \theta + \vec{j}_0 \sin \theta$
 $\vec{j}_1 = -\vec{l}_0 \sin \theta + \vec{j}_0 \cos \theta$,

et en projetant le long de \vec{l}_0 et de \vec{j}_0 :

$$m_1 (\ddot{x} + a \ddot{\theta} \cos \theta - a \dot{\theta}^2 \sin \theta) = T$$

$$m_1 (a \ddot{\theta} \sin \theta + a \dot{\theta}^2 \cos \theta) = N - m_1 g$$

Théorème du moment cinétique appliqué en G_1 :

$$I_1 \ddot{\theta} \vec{k}_0 = \vec{G}_1 I \wedge (T \vec{l}_0 + N \vec{j}_0) = (a \vec{j}_1 - R \vec{j}_0) \wedge (T \vec{l}_0 + N \vec{j}_0)$$

$$\Rightarrow I_1 \ddot{\theta} = -N a \sin \theta - T (a \cos \theta - R)$$

4) On linéarise les 3 équations obtenues en notant $\sin \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta \simeq 1$:

$$\begin{cases} m_1 (\ddot{x} + a \ddot{\theta} - a \dot{\theta}^2) = T \\ m_1 (a \ddot{\theta} + a \dot{\theta}^2) = N - m_1 g \\ I_1 \ddot{\theta} = -Na\theta - T(a-R) \end{cases}$$

soit en négligeant les ω^t petits d'ordre supérieur à 1 :

$$\begin{cases} m_1 (\ddot{x} + a \ddot{\theta}) = T \\ 0 = N - m_1 g \Rightarrow N = m_1 g \\ I_1 \ddot{\theta} = -m_1 g a \theta - T(a-R) \end{cases}$$

$$\text{or } \ddot{x} = -R\ddot{\theta} \Rightarrow T = m_1 (a-R) \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow (I_1 + m_1 (a-R)^2) \ddot{\theta} + m_1 g a \theta = 0$$

$$5) E_C^0(l) = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}(G_1)^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2$$

$$\text{or } \vec{v}(G_1)^2 = \dot{x}^2 + a^2 \dot{\theta}^2 + 2a \dot{x} \dot{\theta} \underbrace{\vec{L}_0 \cdot \vec{L}_1}_{\cos \theta} \simeq (\dot{x} + a \dot{\theta})^2$$

$$\Rightarrow E_C^0(l) = \frac{1}{2} m_1 (a-R)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} (I_1 + m_1 (a-R)^2) \dot{\theta}^2$$

$$E_P^0(l) = -m_1 g a \cos \theta \simeq -m_1 g a \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E_P^0(l) = m_1 g a \frac{\theta^2}{2} + \text{cte}$$

Théorème de l'énergie mécanique $\Rightarrow \frac{dE_C}{dt} + \frac{dE_P}{dt} = 0$,
et l'on retrouve bien l'équation du mouvement

6) L'équation de Lagrange en θ s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial E_P}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \text{en travaillant sur les expressions de } E_C \text{ et de } E_P \text{ non linéarisés.}$$

$$\begin{cases} E_C = \frac{1}{2} (I_1 + m_1 (a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)) \dot{\theta}^2 \\ E_P = -m_1 g a \cos \theta \end{cases}$$

$$E_P = -m_1 g a \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (I_1 + m_1 (a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)) \dot{\theta} - aR \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_1 g a \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow (I_1 + m_1 (a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta)) \ddot{\theta} + 2aR \dot{\theta}^2 \sin \theta - aR \dot{\theta}^2 \sin \theta + m_1 g a \sin \theta = 0$$

soit en linéarisant, $\sin \theta \simeq \theta$, $\cos \theta \simeq 1$ et en recontourant que les ω^t petits d'ordre 1 :

$$\Rightarrow [I_1 + m_1 (a^2 + R^2 - 2aR)] \ddot{\theta} + m_1 g a \theta = 0$$

7) Paramètres inertiels du solide (1)

$$\vec{OG}_1 = \frac{m \vec{OG} + m' \vec{OM}'}{m + m'}, \text{ soit pour } O \equiv G$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{m' l}{m_1}}$$

$$I_1 = \underbrace{I + ma^2}_{\text{disque}} + \underbrace{m' (l-a)^2}_{\text{masse } m'}$$

$$\Rightarrow I_1 = I + l^2 \left(m \frac{m'^2}{m_1^2} + m' \left(1 - \frac{m'}{m_1} \right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = I + l^2 \frac{mm'}{m + m'}} \quad \underbrace{\quad}_{m^2/m_1^2}$$

Exercice 1: $\{v_G\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ (R-r) \dot{\varphi} \vec{e}_{2c} \end{Bmatrix}$

$$\{v_I\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ ((R-r) \dot{\varphi} + r \dot{\theta}) \vec{e}_{2c} \end{Bmatrix}, \quad \{v_H\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \vec{k}_0 \\ ((R-r) \dot{\varphi} - r \dot{\theta}) \vec{e}_{2c} \end{Bmatrix}$$

Condition de roulement sans glissement =

$$(R-r) \dot{\varphi} = -r \dot{\theta} \Rightarrow v_I = 0 \text{ et } \underline{v_H = 2v_G}$$

Exercice 2: $\rho(x) = \rho_0 (x^2/L^2)$

$$x_G = \frac{\int x dm}{\int dm}, \text{ avec } dm = \rho(x) dx = \rho_0 \left(\frac{x^2}{L^2} \right) dx$$

$$\Rightarrow x_G = \frac{\int \rho_0 \left(\frac{x^2}{L^2} \right) x dx}{\int \rho_0 \left(\frac{x^2}{L^2} \right) dx} = \frac{\int_0^L x^3 dx}{\int_0^L x^2 dx} = \frac{L^4/4}{L^3/3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_G = \frac{3}{4} L} \quad M = \int \rho_0 \left(\frac{x^2}{L^2} \right) dx = \frac{1}{3} \rho_0 L$$

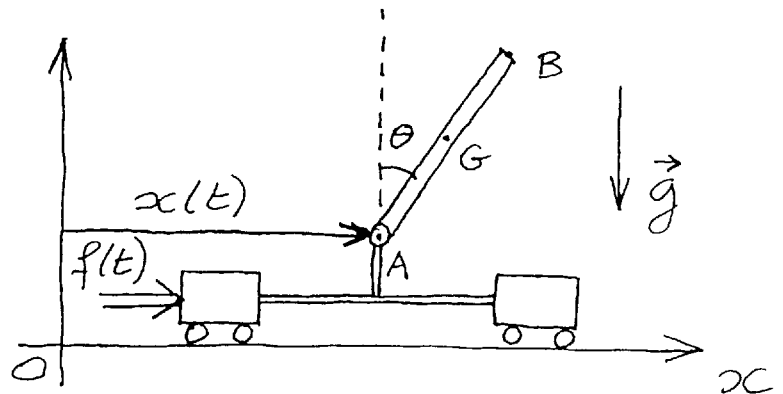
$$I = \int x^2 dm = \int_0^L \rho_0 \left(\frac{x^2}{L^2} \right) x^2 dx = \frac{\rho_0}{L^2} \int_0^L x^4 dx = \frac{\rho_0}{L^2} \frac{L^5}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{oy} = \rho_0 L^3/5} \quad I_{Gy} = I_{oy} - M x_G^2 = \rho_0 L^3/80$$

Examen de Mécanique du solide indéformable

Problème: Étude élémentaire d'un pendule inversé

On considère un pendule "inversé", constitué de deux petits chariots de masse totale M astreints à se déplacer le long de l'horizontale Ox . Un pendule rigide constitué par une tige de masse m et de longueur $AB = 2\ell$ est fixé au point A par une liaison rotoïde parfaite (cf figure ci-contre).



On note $AG = \ell$, et $x_G(t) = x(t) + \ell \sin \theta(t)$. Une force extérieure $f(t)$ est appliquée sur le premier chariot, de telle manière à essayer de conserver l'équilibre de la tige AB .

1) Calculer l'énergie cinétique T du système, et montrer que :

$$T = \frac{1}{2} (M + m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (J + m\ell^2) \dot{\theta}^2 + m\ell \dot{\theta} \dot{x} \cos \theta,$$

où J est le moment d'inertie de la tige AB .

2) Calculer l'énergie potentielle V du système dans le champ de pesanteur \vec{g} . Vérifier que cette énergie potentielle diminue bien lorsque $\theta(t)$ augmente.

3) En utilisant le formalisme des équations de Lagrange, obtenir les deux équations du mouvement.

4) Linéariser ces deux équations dans le cas des petits déplacements ($x \ll 1$, et $\theta \ll 1$) et montrer que :

$$\begin{aligned} (M+m) \ddot{x} + m\ell \ddot{\theta} &= f(t) \\ (J+m\ell^2) \ddot{\theta} + m\ell \ddot{x} &= mgl \theta \end{aligned}$$

5) Eliminer la variable x dans ces deux équations, pour obtenir l'équation différentielle en θ sous la forme :

$$\alpha \ddot{\theta} + \beta \theta = f(t).$$

Exprimer α et β .

6) Evaluer le signe de β / α . Dans le cas où $f(t) = 0$, on cherche à mettre l'équation du mouvement sous la forme habituelle :

$$\ddot{\theta} \pm \omega_0^2 \theta = 0.$$

Quel est le signe devant le terme $\omega_0^2 \theta$? Quelle est la solution générale de cette équation ? Que pouvez-vous déduire sur la stabilité de l'équilibre ? Est-ce que ce résultat vous semble logique ?

7) On se propose de calculer le moment d'inertie J de la tige. Montrer que $J = (4/3) m\ell^2$. Ecrire alors l'équation du mouvement du 5) lorsque $M = 2m$. Quelle serait la pulsation de résonance de ce système "retourné" (avec \vec{g} orienté vers le haut) ? Quelle serait la longueur du pendule simple équivalent ?

8) On reprend les 2 équations du mouvement établies à la question 4) lorsque $f(t) = 0$ et lorsque \vec{g} est dirigé vers le haut de la figure (ce qui revient à retourner le système mécanique, en supposant qu'un guide constitué d'un rail à glissière empêche les chariots de tomber). Ecrire les nouvelles équations du mouvement. On cherche des solutions harmoniques sous la forme :

$$x(t) = X \exp j\omega t ; \theta(t) = \Theta \exp j\omega t.$$

En déduire la pulsation de résonance ω . Pourquoi n'y a-t-il qu'une seule pulsation, alors que le système possède a priori 2 degrés de liberté ? Que se passe-t-il lorsque $f(t) \neq 0$? Calculer ω pour $J = (4/3) m\ell^2$ et $M = 2m$, et retrouver le résultat de la question 7).

9) Calculer le vecteur propre correspondant à la valeur de ω dans le cas général, et montrer que les deux équations du mouvement fournissent indifféremment :

$$-\frac{X}{\Theta} = \frac{m\ell}{M+m}.$$

En déduire que le mouvement des masses M et m s'effectue en opposition de phase. Dessiner sur un petit schéma l'allure de ces déplacements.

10) Retrouver le résultat de la question 9) à partir d'un argument simple basé sur la conservation de la quantité de mouvement pour un système isolé ($f(t) = 0$) non dissipatif.

Note: **La plupart des 10 questions sont indépendantes.**

Problème: Etude élémentaire d'un pendule inversé

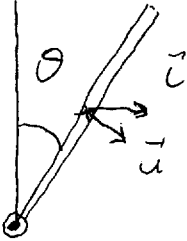
$$1) T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2, \text{ où } \vec{v}_G = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AG}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_G = \dot{x} \vec{L} + l \dot{\theta} \vec{u} \Rightarrow v_G^2 = \dot{x}^2 + (l \dot{\theta})^2 + 2l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} (M+m) \dot{x}^2 + \frac{1}{2} (J + ml^2) \dot{\theta}^2 + ml \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta$$

$$2) V = mgl (\cos \theta - 1) + V_0$$

V diminue lorsque θ augmente -
 (Pour le pendule simple non "inversé" on prend
 $V = mgl (1 - \cos \theta) + V_0$)



$$3) \alpha_x \Rightarrow (M+m) \ddot{x} + ml (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = f(t)$$

$$\alpha_\theta \Rightarrow (J + ml^2) \ddot{\theta} + ml (\ddot{x} \cos \theta - \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta) - mgl \sin \theta = 0$$

4) Equations linéarisées $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$
 et l'on regarde que les ordres petits d'ordre 1 :

$$\begin{cases} (M+m) \ddot{x} + ml \ddot{\theta} = f(t) & (1) \\ (J + ml^2) \ddot{\theta} + ml \ddot{x} - mgl \theta = 0 & (2) \end{cases}$$

5) On élimine \ddot{x} entre ces deux équations :

$$(2) \Rightarrow \ddot{x} = \frac{1}{ml} [mgl \theta - (J + ml^2) \ddot{\theta}]$$

$$(1) \Rightarrow (M+m) g \theta - \left[\left(\frac{M+m}{ml} \right) J + Ml \right] \ddot{\theta} = f(t)$$

du type $\alpha \ddot{\theta} + \beta \theta = f(t)$,

avec $\alpha = - \left[\left(\frac{M+m}{ml} \right) J + Ml \right]$, et $\beta = (M+m)g$

$$6) \beta/\alpha < 0, \text{ d'où } \ddot{\theta} - \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \theta(t) = A \exp \omega_0 t + B \exp (-\omega_0 t),$$

avec A et B déterminés à l'aide des conditions initiales.

Lorsque t augmente, $\theta(t)$ croît continuellement : On a affaire à un équilibre instable. Cela provient du signe \ominus dans l'équation du mouvement.

$$7) \text{ Par définition } dJ = r^2 dm \Rightarrow J = \int_0^{2l} r^2 dm$$

$$\text{or } \left. \begin{matrix} dm = \rho dr \\ m = \rho \times 2l \end{matrix} \right\} \Rightarrow dm = \frac{m dr}{2l}$$

$$\Rightarrow J = \frac{m}{2l} \int_0^{2l} r^2 dr = \frac{m}{2l} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{2l} \Rightarrow J = \frac{4}{3} ml^2$$

7) (suite). Avec cette valeur de J ($J = \frac{4}{3} m l^2$) et lorsque $M = 2m$, l'équation du mouvement établie à la question 5) devient :

$$g\theta - 2l\ddot{\theta} = f(t)/3 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{2l}}$$

On trouve la pulsation d'un pendule simple de longueur $2l$.

8) Si \vec{g} est orienté vers le haut, les 2 équations du mouvement établies à la question 4) deviennent :

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = 0 \\ ml\ddot{x} + (J+ml^2)\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \end{cases}$$

D'où $x = X \exp j\omega t$, $\theta = \textcircled{H} \exp j\omega t$

$$\Rightarrow \begin{cases} (M+m)X + ml\textcircled{H} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ml\omega^2 X + [(J+ml^2)\omega^2 - mgl]\textcircled{H} = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (M+m)[(J+ml^2)\omega^2 - mgl] - m^2 l^2 \omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow [(M+m)J + Mml^2]\omega^2 = (M+m)mgl$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{(M+m)mgl}{(M+m)J + mml^2}}$$

Dans le cas où $M = 2m$, et $J = \frac{4}{3} ml^2$, on retrouve $\omega = \sqrt{\frac{g}{2l}}$, résultat établi à la question 7).

9) L'équation (3) fournit directement $\frac{X}{\textcircled{H}} = -\frac{ml}{M+m}$

On retrouve ce résultat à partir de l'équation (4) dans laquelle on remplace ω^2 par sa valeur :

$$\omega^2 = \frac{(M+m)mgl}{(M+m)J + mml^2}$$

$$\Rightarrow (M+m)m^2 l^2 g X + \left\{ (J+ml^2)(M+m)mgl - (M+m)Jmgl - m^2 M g l^3 \right\} \textcircled{H} = 0$$

$$\Rightarrow (M+m)m^2 l^2 g X + \left\{ (M+m)m^2 l^3 g - m^2 M l^3 g \right\} \textcircled{H} = 0$$

$$\Rightarrow (M+m)X + ml\textcircled{H} = 0 \Rightarrow \frac{X}{\textcircled{H}} = -\frac{ml}{M+m} \quad \begin{array}{l} \text{mvte en} \\ \text{opposition} \\ \text{de phase} \end{array}$$

10) Conservation de la quantité de mouvement :

$$(M+m)\dot{x} = -ml\dot{\theta}$$

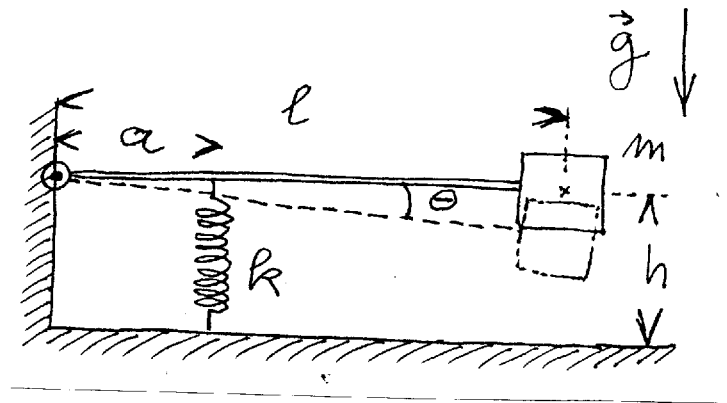
↑
translation d'ensemble

↑
rotation de la masse m

Examen de Mécanique du solide indéformable

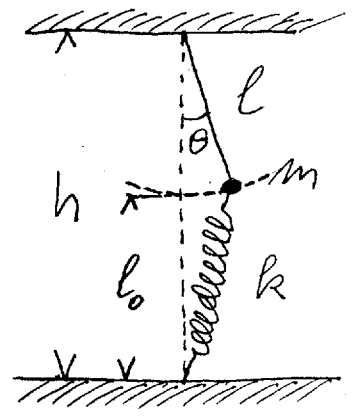
Exercice 1: Étude d'un système masse-ressort

On considère le système mécanique ci-contre constitué d'une masse m située au bout d'une tige rigide de masse négligeable, de longueur ℓ . Cette tige est accrochée à la paroi par une liaison rotoïde parfaite, et elle est supportée par un ressort linéaire de constante de raideur k . A l'équilibre, on suppose que la tige est horizontale ($\theta = 0$). Écrire l'équation du mouvement. En déduire la pulsation de résonance du système. Que se passe-t-il lorsque $a = \ell$?



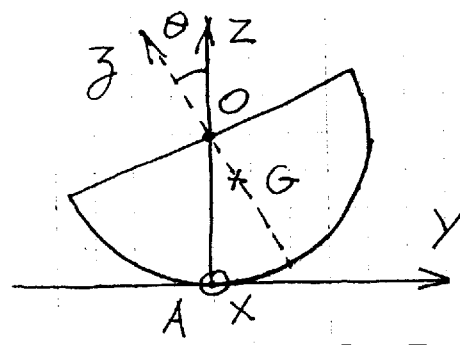
Exercice 2: Étude d'un pendule simple accroché à un ressort

On considère un pendule simple de masse m accroché à un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable, relié à un ressort de constante de raideur k , et de longueur au repos ℓ_0 supposé sans masse. Calculer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V . Appliquer le théorème de conservation de l'énergie mécanique. En déduire l'équation du mouvement. Écrire alors l'équation linéarisée, et en déduire la pulsation de résonance pour le cas où $\ell \ll h$.



Problème: Mouvement de roulement d'une 1/2 sphère sur un plan horizontal

On considère une demi-sphère pleine (ou demi-boule) de rayon R , homogène de masse volumique ρ posée sur un plan horizontal. Elle pourra osciller librement autour de sa position d'équilibre. On suppose que le mouvement de roulement s'effectue **sans glissement**.



1) Calculer la position G du centre d'inertie. On exprimera OG en fonction de R , sachant que O est le centre de la sphère (cf figure ci-contre).

2) Calculer le moment d'inertie I_{OX} de la demi-sphère, évalué en O par rapport à l'axe horizontal X .

3) En appliquant le théorème d'Huyghens deux fois (successivement entre G et O , puis entre O et A), exprimer alors I_{AX} , et montrer qu'il s'agit d'une fonction de $\cos \theta$, qui s'écrit :

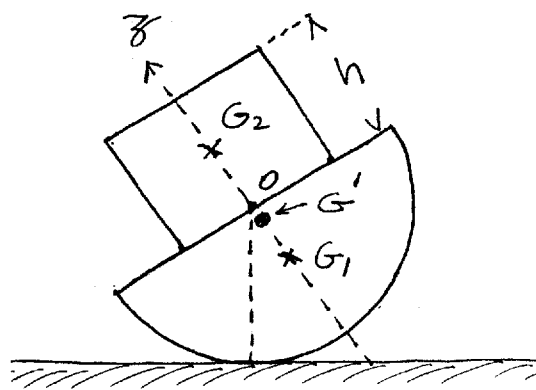
$$I_{AX} = MR^2 \left(\frac{7}{5} - \frac{3\cos\theta}{4} \right).$$

4) Par la méthode de votre choix, exprimer l'équation du mouvement, et montrer qu'elle peut s'écrire :

$$\left(\frac{7}{5} - \frac{3\cos\theta}{4} \right) \ddot{\theta} + \frac{3}{8} \dot{\theta}^2 \sin\theta + \frac{3g}{8R} \sin\theta = 0.$$

5) Linéariser cette équation ($\sin\theta \approx \theta$; $\cos\theta \approx 1$) pour les petites oscillations et calculer leur période.

6) On colle sur la face plane de l'hémisphère un cube de côté h , de masse volumique ρ identique à celle de la demi-sphère, centré sur O . Écrire l'équation permettant de calculer la position G' du centre d'inertie du système constitué des deux solides (cf figure ci-contre).



7) Expliquer à l'aide de considérations géométriques simples que tant que G' est situé en dessous de O sur l'axe de symétrie Oz de la figure, l'équilibre est stable. Que se passe-t-il lorsque G' est au-dessus de O ? Lorsqu'il est confondu avec O ? Écrire alors la condition pour que G' soit en O , et en déduire la relation : $h = \sqrt[4]{\pi/2} R$. Application numérique : Calculer OG' lorsque $h = R$.

Note: Les questions 2, 4, 5 & 6 sont indépendantes.

Exercice 1: $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \sum \vec{M}_O^{F_{ext}}$

$|\vec{\sigma}| = I|\ddot{\theta}| = ml^2\ddot{\theta} \Rightarrow ml^2\ddot{\theta} = -(k a \theta) a$
 $\Rightarrow ml^2\ddot{\theta} + k a^2 \theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \times \frac{a}{l}$

Note: Pour $l=a$, on retrouve le cas élémentaire d'un système masse ressort

Exercice 2: $h = l + l_0$, avec $l_0 =$ longueur à vide du ressort

$T = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2$

$V = mgl(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} k \left[(h^2 + l^2 - 2hl \cos\theta)^{1/2} - l_0 \right]^2$

$\frac{dT}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0$

$\Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + mgl \dot{\theta} \sin\theta + k \frac{2hl \dot{\theta} \sin\theta \left[(h^2 + l^2 - 2hl \cos\theta)^{1/2} - l_0 \right]}{2(h^2 + l^2 - 2hl \cos\theta)^{1/2}} = 0$

$\Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + \left(mgl + \frac{k l h \left[(h^2 + l^2 - 2hl \cos\theta)^{1/2} - l_0 \right]}{(h^2 + l^2 - 2hl \cos\theta)^{1/2}} \right) \sin\theta = 0$

$\theta \approx 0 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta; \cos\theta = 1$

$\Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + \left(mgl + \frac{k l h}{h-l} \times \left[(h^2 + l^2 - 2hl \cos\theta)^{1/2} - l_0 \right] \right) \theta = 0$

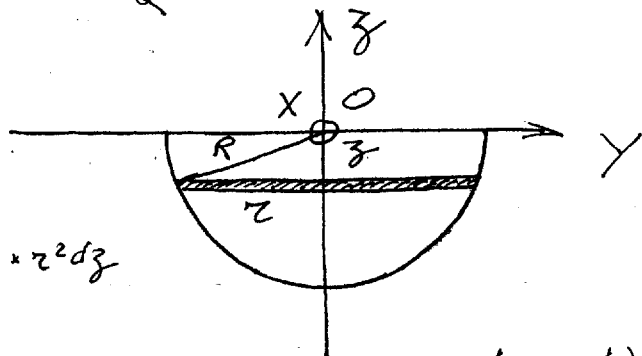
si de plus $h \gg l \Rightarrow ml^2 \ddot{\theta} + (k + mg)l \theta = 0$, car $\left[(h^2 + l^2 - 2hl \cos\theta)^{1/2} - l_0 \right] \approx 0$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \times \left(1 + \frac{k l}{mg} \right)^{1/2}$

Problème:

1) $R^2 = r^2 + z^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - z^2$

$M = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho$
 $dm = \pi r^2 \rho \times dz \Rightarrow dm = \frac{3M}{2R^3} \times r^2 dz$



$\bar{z}_G = \frac{\int z dm}{\int dm} = \frac{3}{2R^3} \int_0^R z (R^2 - z^2) dz = \frac{3}{2R^3} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right)$

$\Rightarrow \bar{z}_G = 3R/8$

2) Le moment d'inertie de la tranche précédente (assimilable à un disque mince), par rapport à l'axe Oz est :

$$dJ_{Oz} = \frac{1}{2} r^2 dm \Rightarrow J_{Oz} = \frac{1}{2} \int r^2 dm$$

$$\Rightarrow J_{Oz} = \frac{3M}{4R^3} \int_0^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{3M}{4R^3} \left(R^4 \times R - 2R^2 \times \frac{R^3}{3} + \frac{R^5}{5} \right)$$

$$= \frac{3MR^2}{4} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{3MR^2}{4} \times \frac{8}{15} = \frac{2}{5} MR^2$$

De plus: $J_{Ox} = \int (y^2 + z^2) dm = J_{Oy} = \int (x^2 + z^2) dm$

$$\Rightarrow J_{Ox} = \frac{1}{2} \int (x^2 + y^2) dm + \int z^2 dm = \frac{1}{2} J_{Oz} + \int z^2 dm$$

$$\int z^2 dm = \frac{3M}{2R^3} \int r^2 z^2 dz = \frac{3M}{2R^3} \int_0^R (R^2 - z^2) z^2 dz$$

$$= \frac{3M}{2R^3} \left(R^2 \times \frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5} \right) = \frac{3MR^2}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3MR^2}{2} \times \frac{2}{15}$$

$$\Rightarrow J_{Ox} = \frac{1}{5} MR^2 + \frac{1}{5} MR^2 = \frac{2}{5} MR^2$$

$$3) J_{Ax} = J_{Ox} - M OG^2 + M AG^2$$

$$OG^2 = \frac{9R^2}{64}; \quad AG^2 = (\vec{OG} - \vec{OA})^2 = \frac{9R^2}{64} + R^2 - 2R \times \frac{3R}{8} \cos \theta$$

$$\Rightarrow J_{Ax} = \frac{2}{5} MR^2 + MR^2 \left(1 - \frac{3 \cos \theta}{4} \right) = MR^2 \left(\frac{7}{5} - \frac{3 \cos \theta}{4} \right)$$

4) A est le centre instantané de rotation. D'où:

$$E_c = \frac{1}{2} J_{Ax} \dot{\theta}^2$$

Théorème de l'énergie cinétique:

$$\frac{dE_c}{dt} = M \vec{g} \cdot \vec{V}_G \quad \text{Seul le poids travaille puisqu'il y a roulement sans glissement.}$$

$$\text{or } \vec{V}_G = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AG} = \dot{\theta} \vec{L} \wedge \vec{AG}$$

$$\text{or } \vec{AG} = \frac{3R}{8} \sin \theta \vec{j} + R \left(1 - \frac{3}{8} \right) \cos \theta \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_G = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3R}{8} \sin \theta \\ R \left(1 - \frac{3}{8} \right) \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \dot{\theta} \left(1 - \frac{3}{8} \right) \cos \theta \\ \frac{3R}{8} \dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = - \frac{3R}{8} Mg \dot{\theta} \sin \theta = \frac{1}{2} J_{Ax} \times 2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \frac{dJ_{Ax}}{dt}$$

$$\Rightarrow J_{Ax} \ddot{\theta} + \frac{1}{2} \dot{\theta} \frac{dJ_{Ax}}{dt} = - \frac{3MgR}{8} \sin \theta$$

$$\Rightarrow MR^2 \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{4} \cos \theta \right) \ddot{\theta} + \frac{3}{8} MR^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{3}{8} MgR \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{4} \cos \theta \right) \ddot{\theta} + \frac{3}{8} \dot{\theta}^2 \sin \theta + \frac{3g}{8R} \sin \theta = 0$$

5) Oscillations faibles / $\theta \ll 1 \Rightarrow \cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \left(\frac{7}{5} - \frac{3}{4} \right) \ddot{\theta} + \frac{3}{8} \theta \dot{\theta}^2 + \frac{3g}{8R} \theta = 0$$

∞⁶ petit de degré 3 (négligeable)

$$\Rightarrow \frac{13}{20} \ddot{\theta} + \frac{3g}{8R} \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{15g}{26R}}$

$$6) 3G = OG_1 = \frac{3R}{8}$$

$$OG_2 = \frac{h}{2}$$

$$\begin{cases} m_1 = \frac{2}{3} \pi R^3 \times \rho \\ m_2 = h^3 \times \rho \end{cases}$$

$$\vec{OG}' = \frac{m_1 \times \vec{OG}_1 + m_2 \times \vec{OG}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow OG' = \frac{\frac{2}{3} \pi R^3 \times \frac{3R}{8} - h^3 \times \frac{h}{2}}{\frac{2}{3} \pi R^3 + h^3}$$

$$7) OG' = 0 \Rightarrow \pi \frac{R^4}{4} = \frac{h^4}{2} \Rightarrow h = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2}} \times R$$

$$\Rightarrow h_{\max} = 1,12 R \quad (\text{approximativement le cas de la figure ci-dessus})$$

Application numérique pour $h = R$

$$\Rightarrow OG' = \frac{\pi \frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{2}}{\frac{2}{3} \pi R^3 + R^3} = \left(\frac{\pi - 2}{2\pi + 3} \right) \times \frac{3}{4} R$$

$$\Rightarrow OG' = 0,0922 R$$

